

Raport Stiintific
Grant CEE-MENER Nr.717/24.07.2006, Etapa II
Universitatea: “Dunărea de Jos” din Galați

Obiectivul VI:

Studiul și implementarea de observare de stare în vederea utilizării lor în algoritmi de reglare a proceselor de epurare biologică a apelor reziduale provenite din industria alimentară.

Activitatea VI.1:

Dezvoltarea de observare de stare cu validare în regim de simulare numerică.

**ESTIMAREA STĂRII ȘI PARAMETRILOR
PROCESULUI DE TRATARE A APELOR UZATE**

1. INTRODUCERE

Necesitatea observărilor de stare pentru procese biotehnologice este impusă de absența unor biosenzori siguri și ieftini, capabili să realizeze direct măsurători on-line ale variabilelor biochimice și biologice, utilizate pentru implementarea unor metode avantajoase de monitorizare și conducere a proceselor biotehnologice (Caraman și Barbu, 2005). Achiziția biomasei, a substratului, a produselor de metabolism, se face prin analiză de laborator, această metodă făcând dificilă conducerea bioreactoarelor (în sensul reglării directe a acestor mărimi). Analiza de laborator necesită prelevarea unei probe din conținutul bioreactorului, ceea ce presupune un risc mărit în contaminarea (infecțarea) culturii. De asemenea, metodele de laborator pentru determinarea numărului de microorganisme, determinarea concentrației substratului, precum și a concentrațiilor produselor de metabolism sunt destul de imprecise, generând astfel incertitudini în aprecierea evoluției mărimilor menționate. Aceste probleme sunt mult amplificate în cazul proceselor de tratare a apelor uzate, în special datorită lipsei dotării corespunzătoare și a unui personal suficient de calificat pentru realizarea unor măsurători de calitate în laborator. În mod normal, în aceste condiții, se poate conta pe una-două analize de laborator în cursul unei săptămâni.

O posibilitate de a ocoli multiplele neajunsuri legate de achiziția datelor, este estimarea mărimilor de interes din procesul de tratare a apelor uzate cu nămol activ considerat. Estimatorul de stare (numit în literatura de specialitate și “senzor software” sau “observer”) nu este altceva decât un algoritm utilizat pentru determinarea unor mărimi ale procesului, care nu sunt măsurabile în timp real, pe baza altor mărimi accesibile din punct de vedere al achiziției lor. Procesele de tratare a apelor uzate, fiind procese neliniare, determină utilizarea variantelor extinse ale estimatorilor liniare, în care matricele sistemului sunt obținute prin liniarizare la fiecare pas de eșantionare. Astfel, calculul matricei de câștig are loc la fiecare pas de eșantionare. De asemenea, procesele de tratare a apelor uzate sunt puternic afectate de incertitudini parametrice și de prezența zgomotului de măsură. În aceste condiții, în cadrul grantului au fost investigate diverse metode de estimare a mărimilor de interes din cadrul proceselor de epurare a apelor uzate: observer determinist (Luenberger), observer stohastic (filtrul Kalman), observare robuste (filtrul H_∞ extins și observerul în regim alunecător).

2. CHESTIUNI TEORETICE

2.1. Forma generală a observerului de stare

Fie un sistem neliniar în formă generală descris de ecuațiile următoare:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \quad (2)$$

unde x este vectorul de stare al sistemului $x \in \mathbb{R}^n$, u este vectorul intrărilor sistemului $u \in \mathbb{R}^m$, iar y este vectorul ieșirilor sistemului $y \in \mathbb{R}^p$.

O clasă generală de observare de stare pentru sistemul neliniar descris de ecuațiile (1) și (2) este următoarea:

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + K(\hat{x}(t), u(t)) \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (3)$$

Observerul de stare, descris de ecuația (3), este o copie a modelului sistemului, descris de ecuația (1), la care se adaugă o componentă proporțională cu eroarea de observare $(y(t) - \hat{y}(t))$. Eroarea de observare devine nulă în cazul estimării perfecte, observerul fiind identic, în acest caz, cu sistemul inițial. Vectorul stărilor estimate \hat{x} conține toate stările, inclusiv cele măsurabile, utilizate pentru reconstrucția celor nemăsurabile. Problema proiectării unui observer de stare constă în alegerea potrivită a matricei de amplificare $K(\hat{x}(t), u(t))$.

Definiția erorii de observare este:

$$e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t) \quad (4)$$

Ținând cont de relațiile (1)-(4), dinamica erorii de observare este prezentată în continuare:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t) + e(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), u(t)) - K(\hat{x}(t), u(t)) \cdot (h(\hat{x}(t) + e(t), u(t)) - h(\hat{x}(t), u(t))) \quad (5)$$

Se observă că eroarea $e=0$ este un punct de echilibru al modelului (5). Fie aproximația liniară în jurul valorii $e=0$:

$$\dot{e}(t) = [A(\hat{x}, u) - K(\hat{x}, u) \cdot C(\hat{x}, u)] \cdot e(t) \quad (6)$$

unde:

$$A(\hat{x}, u) = \left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}} \quad (7)$$

$$C(\hat{x}, u) = \left[\frac{\partial h(x, u)}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}} \quad (8)$$

Proiectarea observerului de stare (3) constă în alegerea unei matrice de amplificare $K(\hat{x}, u)$ astfel încât sistemul liniar să aibă o comportare dorită. Practic se dorește impunerea evoluției erorii de estimare prin proiectarea matricei de amplificare $K(\hat{x}, u)$.

2.2 Observabilitatea proceselor neliniare

Dacă se pot alocă liber valorile proprii ale matricei sistemului liniar (6), atunci se poate asigura o convergență exponențială a variabilelor de stare estimate către valorile reale ale sistemului. În acest caz sistemul (1) se numește **exponențial observabil**, iar observerul (3) se numește **observer exponențial**. În continuare se prezintă o condiție necesară pentru observabilitatea exponențială a proceselor neliniare.

Proprietatea 1. (Selișteanu, 2001) O condiție necesară pentru ca procesul (1) să fie exponențial observabil este ca matricea de observabilitate O să aibă rangul n de-a lungul traiectoriilor procesului:

$$\text{rang}(O) = n \quad (9)$$

unde:

$$O \triangleq \begin{bmatrix} C(x,u) \\ C(x,u) \cdot A(x,u) \\ C(x,u) \cdot A^2(x,u) \\ \vdots \\ C(x,u) \cdot A^{n-1}(x,u) \end{bmatrix} \quad (10)$$

și

$$A(x,u) = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} \quad (11)$$

$$C(x,u) = \frac{\partial h(x,u)}{\partial x} \quad (12)$$

Proprietatea 1 permite detectarea proceselor care nu sunt exponențial observabile, condiția (9) fiind o condiție doar necesară, nu și suficientă. De asemenea, condiția (9) este o condiție necesară și suficientă pentru sistemul (1) liniarizat în jurul unui punct de echilibru \bar{x} . Dacă modelul liniarizat tangențial în jurul punctului de echilibru este exponențial observabil, atunci sistemul neliniar (1) este observabil într-o vecinătate a acestui punct.

2.3 Studiul observabilității procesului de tratare a apelor uzate cu nămol activ

Fie procesul neliniar de tratare a apelor uzate cu nămol activ (Nejjari ș.a., 1999) descris de ecuațiile (13)-(17).

$$\frac{dX}{dt} = \mu(t)X(t) - D(t)(1+r)X(t) + rD(t)X_r(t) \quad (13)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\mu(t)}{Y}X(t) - D(t)(1+r)S(t) + D(t)S_{in} \quad (14)$$

$$\frac{dDO}{dt} = -\frac{K_0\mu(t)X(t)}{Y} - D(t)(1+r)DO(t) + \alpha W(DO_{max} - DO(t)) + D(t)DO_{in} \quad (15)$$

$$\frac{dX_r}{dt} = D(t)(1+r)X(t) - D(t)(\beta+r)X_r(t) \quad (16)$$

$$\mu(t) = \mu_{max} \frac{S(t)}{K_s + S(t)} \frac{DO(t)}{K_{DO} + DO(t)} \quad (17)$$

unde: $X(t)$ – biomasa (concentrația nămolului activ în bazinul de aerare); $S(t)$ – substratul; $DO(t)$ – concentrația de oxigen dizolvat; DO_{max} – cantitatea maximă de $DO(t)$; $X_r(t)$ – biomasa recirculată (concentrația nămolului activ recirculat); $D(t)$ – viteză de diluție = debit/volumul bazinului; Y – coeficient de producție; μ – viteză specifică de creștere a microorganismelor; μ_{max} – rată maximă de creștere; K_s – constantă de saturație; K_{DO} – constantă de saturație pentru oxigen; α – rată a transferului de oxigen; K_0 – constantă de model; W – rată a fluxului de aer; S_{in} – concentrație a substratului în apă la intrare; DO_{in} – concentrație a oxigenului dizolvat în apă la intrare; r – rată de nămol recirculat; β – rată de nămol excedentar (eliminat).

În continuare sunt prezentate mărimile de intrare și ieșire ale procesului:

- mărimi de intrare: rata de aerare W [m^3/h^{-1}] și rata de diluție D [h^{-1}].
- mărimi de ieșire (mărimi considerate măsurabile): concentrația substratului organic din efluent S [mg/l] și concentrația oxigenului dizolvat din bazinul aerat DO [mg/l].

Mărimea de calitate este concentrația substratului organic din efluent. Scopul structurii de control va fi obținerea unui efluent având concentrația substratului sub limita standard impusă prin lege (sub 20 mg/l).

Pentru modelul descris de ecuațiile (13)-(17) se consideră următorii parametri:

$$\mu_{\max} = 0.15 \text{ mg/l}; K_S = 100 \text{ mg/l}; K_{DO} = 2 \text{ mg/l}; Y = 0.65; K_0 = 0.5; \alpha = 0.018; DO_{\max} = 10 \text{ mg/l}; \beta = 0.2.$$

În Figura 1 sunt prezentate rezultatele simulării privind dinamicile libere ale modelului dat de ecuațiile (13)-(17). Simularea a fost făcută considerând următoarele condiții inițiale: $X(0) = 200 \text{ mg/l}$, $S(0) = 90 \text{ mg/l}$, $DO(0) = 5 \text{ mg/l}$, $X_r(0) = 320 \text{ mg/l}$. De asemenea, s-a considerat că: $D = 0.1 \text{ h}^{-1}$, $W = 80 \text{ m}^3/\text{h}$, $r = 0.6$, $DO_{in} = 0.5 \text{ mg/l}$, $S_{in} = 200 \text{ mg/l}$.

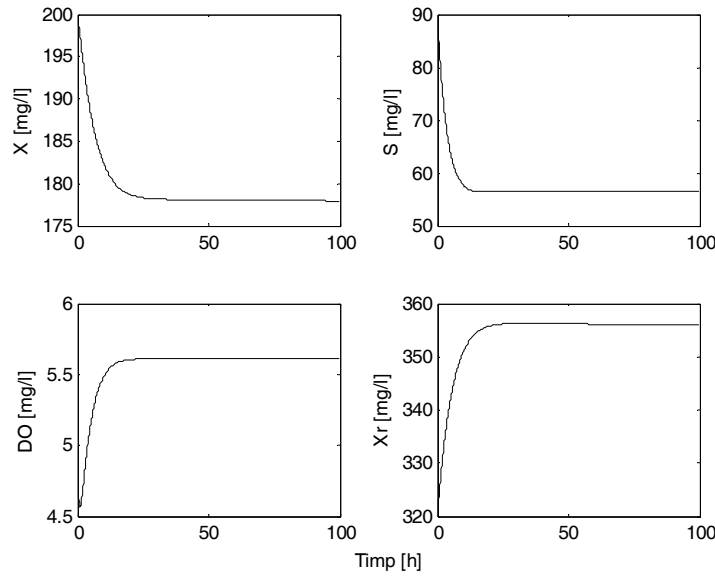


Figura 1: Rezultatele simulării modelului în buclă deschisă

Pentru acest sistem se consideră că sunt măsurabile substratul organic (S) și oxigenul dizolvat (DO), dorindu-se estimarea întregului vector de stare. Matricele de stare și ieșire ale procesului linearizat în jurul lui $x = \hat{x}$ sunt date de următoarele ecuații:

$$A(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \hat{\mu} - D \cdot (1+r) & \frac{\hat{\mu} \cdot \hat{X} \cdot K_S}{\hat{S} \cdot (K_S + \hat{S})} & \frac{\hat{\mu} \cdot \hat{X} \cdot K_{DO}}{\hat{DO} \cdot (K_{DO} + \hat{DO})} & r \cdot D \\ \frac{\hat{\mu}}{Y} & -\frac{\hat{\mu} \cdot \hat{X} \cdot K_S}{Y \cdot \hat{S} \cdot (K_S + \hat{S})} - D \cdot (1+r) & -\frac{\hat{\mu} \cdot \hat{X} \cdot K_{DO}}{\hat{DO} \cdot (K_{DO} + \hat{DO})} & 0 \\ -\frac{K_0 \cdot \hat{\mu}}{Y} & -\frac{K_0 \cdot \hat{\mu} \cdot \hat{X} \cdot K_S}{Y \cdot \hat{S} \cdot (K_S + \hat{S})} & -\frac{K_0 \cdot \hat{\mu} \cdot \hat{X} \cdot K_{DO}}{\hat{DO} \cdot (K_{DO} + \hat{DO})} - D \cdot (1+r) - \alpha W & 0 \\ D \cdot (1+r) & 0 & 0 & -D \cdot (\beta + r) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

unde:

$$\hat{\mu}(t) = \mu_{\max} \frac{\hat{S}(t)}{K_s + \hat{S}(t)} \cdot \frac{\hat{DO}(t)}{K_{DO} + \hat{DO}(t)} \quad (20)$$

Matricea de observabilitate, prezentată în cadrul proprietății 1, are în acest caz următoarea formă:

$$O = \begin{bmatrix} L \\ L \cdot A(x) \\ L \cdot A^2(x) \\ L \cdot A^3(x) \end{bmatrix} \quad (21)$$

Din calculul determinantului asociat matricei de observabilitate, se poate trage concluzia că rangul matricei este maxim ($n=4$) dacă este îndeplinită condiția:

$$\frac{\mu_{\max}^2 \cdot S^2 \cdot DO^2 \cdot D \cdot r}{Y \cdot (K_s + S)^2 \cdot (K_{DO} + DO)^2} \neq 0 \quad (22)$$

de-a lungul traiectoriilor sistemului. Cum pentru procesul studiat μ_{\max}, S, DO, D, r au întotdeauna valori strict pozitive, rezultă că $\text{rang}(O)=4$ și condiția necesară de observabilitate exponențială este îndeplinită (conform cu proprietatea 1). În aceste condiții se poate trece la proiectarea observerelor exponențiale pentru procesul de epurare a apelor uzate cu nămol activ.

3. ESTIMATORUL KALMAN EXTINS

3.1. Prezentarea algoritmului de implementare a filtrului Kalman extins

Fie sistemul neliniar descris de următoarele ecuații (Lewis, 1986):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + G_1 w(t) \quad (23)$$

$$y(t) = h(x(t)) + G_2 v(t) \quad (24)$$

$$z(t) = C_1 x(t) \quad (25)$$

unde: $x \in R^n$ este vectorul de stare, $y \in R^m$ este vectorul mărimilor măsurate și $z \in R^p$ este vectorul semnalelor estimate; $w(t)$ și $v(t)$ sunt vectori ai zgomotelor de proces și, respectiv, de măsură. Zgomotul de proces și zgomotul de măsură sunt presupuse ca fiind zgomote albe, necorelate și cu distribuție normală.

Pentru implementarea unui filtru Kalman extins al procesului neliniar se parcurg următorii patru pași:

Pas1: Se liniarizează procesul în jurul punctului de funcționare $x = \hat{x}$:

$$A(\hat{x}) = \frac{\partial f(\hat{x}, u)}{\partial \hat{x}}; \quad B(\hat{x}) = \frac{\partial f(\hat{x}, u)}{\partial u}; \quad C_2(\hat{x}) = \frac{\partial h(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \quad (26)$$

Pas 2: Se calculează matricea de câștig a estimatorului, utilizând rutina Matlab *kalman*:

$$[Sest, K, P] = \text{kalman}(Sis, Q, R)$$

unde: $Sest$ este estimatorul Kalman liniar obținut în punctul respectiv de funcționare, K este matricea de câștig a filtrului Kalman, P este eroarea de covarianță, Sis este sistemul obținut prin liniarizare, utilizând formula (26), și el se calculează astfel: $Sis = SS(A, [B \ G_1], C_2, D)$, Q reprezintă covarianța zgomotului de proces, iar R este covarianța zgomotului de măsură.

Pas 3: Utilizând matricea de câștig determinată la Pasul 2, se scriu ecuațiile corespunzătoare filtrului Kalman extins:

$$\hat{x}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + K[y(t) - h(\hat{x}(t))] \quad (27)$$

Pas 4: Se integrează sistemul și filtrul Kalman extins, se obțin noile puncte de funcționare și se revine la Pasul 2.

Implementarea unui filtru Kalman extins pentru estimarea stării și a parametrilor unui proces se face utilizând același algoritm, cu utilizarea însă a vectorului de stare extins, prin includerea stărilor propriu-zise și a parametrilor ce se dorește a fi estimați (Barbu, 2006).

3.2. Implementarea filtrului Kalman extins pentru procesul de tratare a apelor uzate

Pentru implementarea filtrului Kalman extins pentru estimarea stării se consideră măsurabile substratul organic și oxigenul dizolvat, dorindu-se estimarea întregului vector de stare al procesului. Sistemul (13)-(17) a fost liniarizat, rezultând următoarele valori pentru matricele sistemului liniar:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

unde

$$a_{11} = \mu - D \cdot (1 + r), \quad a_{12} = \mu \cdot \frac{X \cdot K_S}{S \cdot (K_S + S)},$$

$$a_{13} = \mu \cdot \frac{X \cdot K_{DO}}{DO \cdot (K_{DO} + DO)}, \quad a_{14} = r \cdot D, \quad a_{21} = -\frac{\mu}{Y},$$

$$a_{22} = -\frac{\mu \cdot X \cdot K_S}{Y \cdot S \cdot (K_S + S)} - D \cdot (1 + r), \quad a_{23} = -\frac{\mu \cdot X \cdot K_{DO}}{Y \cdot DO \cdot (K_{DO} + DO)}, \quad a_{24} = 0,$$

$$a_{31} = -\frac{K_0 \cdot \mu}{Y}, \quad a_{32} = -\frac{K_0 \cdot \mu \cdot X \cdot K_S}{Y \cdot S \cdot (K_S + S)},$$

$$a_{33} = -\frac{K_0 \cdot \mu \cdot X \cdot K_{DO}}{Y \cdot DO \cdot (K_{DO} + DO)} - D \cdot (1 + r) - \alpha \cdot W, \quad a_{34} = 0, \quad a_{41} = D \cdot (1 + r),$$

$$a_{42} = 0, \quad a_{43} = 0, \quad a_{44} = -D \cdot (\beta + r)$$

$$B = \begin{bmatrix} -X \cdot (1 + r) + r \cdot X_r & 0 \\ -S \cdot (1 + r) + S_{in} & 0 \\ -DO \cdot (1 + r) + DO_{in} & \alpha \cdot (DO_{max} - DO) \\ X \cdot (1 + r) - X_r \cdot (\beta + r) & 0 \end{bmatrix}; \quad G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; D=0.$$

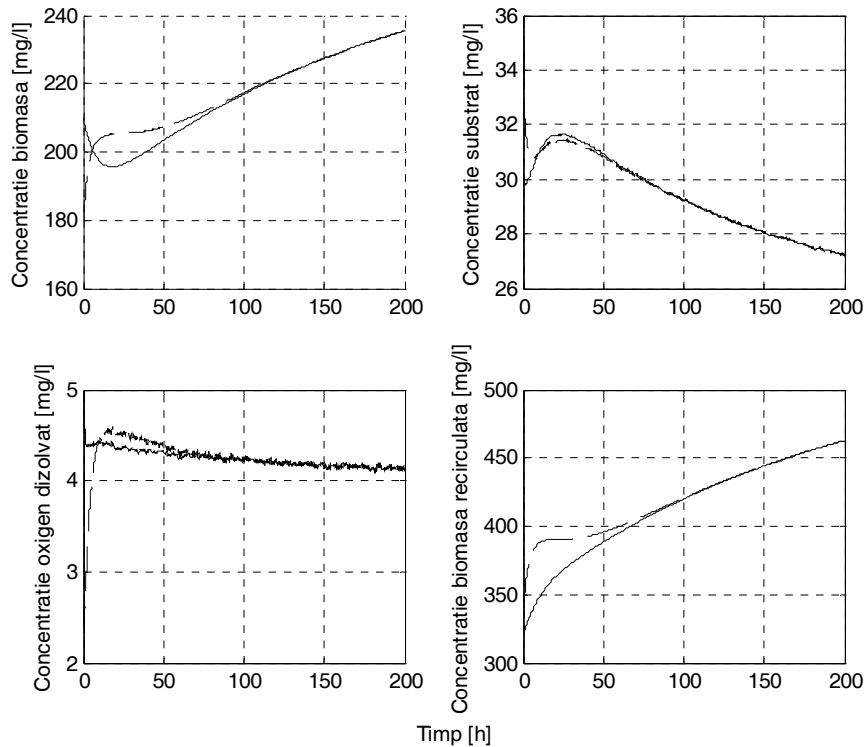


Figura 2: Estimarea stării utilizând filtrul Kalman extins (linie continuă: variabile proces, linie întreruptă: estimațiile acestora)

Implementarea filtrului Kalman extins pentru procesului de tratare a apelor uzate cu nămol activ se face utilizând programele *Princ101.m* și *Ord101.m*, prezentate în anexa CD. Rezultatele obținute utilizând filtrul Kalman extins sunt prezentate în Figura 2. Din figură se observă o bună convergență a estimatorului implementat, chiar în condițiile prezenței atât a zgomotului de proces cât și a zgomotului de măsură.

4. ESTIMATORUL LUENBERGER EXTINS

4.1 Prezentarea algoritmului de implementare a observerului Luenberger extins

Fie sistemul neliniar descris de următoarele ecuații:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (28)$$

$$y(t) = h(x(t)) \quad (29)$$

$$z(t) = C_1 x(t) \quad (30)$$

unde: $x \in R^n$ este vectorul de stare, $y \in R^m$ este vectorul mărimilor măsurate și $z \in R^p$ este vectorul semnalelor estimate. Pentru implementarea unui observer Luenberger extins al procesului neliniar se parcurg următorii 4 pași:

Pas1: Se liniarizează procesul în jurul punctului de funcționare $x = \hat{x}$, obținându-se matricele:

$$A(\hat{x}) = \frac{\partial f(\hat{x}, u)}{\partial \hat{x}}; B(\hat{x}) = \frac{\partial f(\hat{x}, u)}{\partial u}; C_2(\hat{x}) = \frac{\partial h(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \quad (31)$$

Pas 2: Se calculează matricea de câștig a estimatorului, utilizând rutina Matlab *place*:

$$K = \text{place}(A^T, C_2^T, P) \quad (32)$$

unde: K este matricea de câștig a observerului Luenberger, A și C_2 matricele sistemului liniarizat calculate la Pasul 1, iar P este vectorul valorilor proprii alocate estimatorului. Se face precizarea că rutina Matlab *place* este utilizată de obicei pentru calculul reacției după stare a unui sistem. Prin apelarea ei într-o formă modificată, așa cum este prezentată mai sus, ea poate fi utilizată și pentru calculul matricei de câștig a observerului Luenberger.

Pas 3: Utilizând matricea de câștig determinată la Pasul 2, se scriu ecuațiile corespunzătoare observerului Luenberger extins:

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + K[y(t) - h(\hat{x}(t))] \quad (33)$$

Pas 4: Se integrează sistemul și observerul Luenberger extins, se obțin noile puncte de funcționare și se revine la Pasul 2.

Implementarea unui estimator de stare și parametri bazat pe observer Luenberger extins, pentru un proces neliniar, se poate face în două moduri: fie prin extinderea vectorului de stare cu parametrii ce se dorește a fi estimați, fie prin proiectarea a două estimatoare, unul pentru stare și unul pentru parametri.

4.2 Implementarea observerului Luenberger extins pentru procesul de tratare a apelor uzate

Pentru implementarea observerului Luenberger extins pentru estimarea stării se utilizează aceleași matrice ale sistemului liniarizat, ca și în cazul filtrului Kalman extins. Singurele diferențe constau în faptul că acum se poate considera măsurabil doar oxigenul dizolvat, iar vectorul valorilor proprii, prin care se impune dinamica anulării erorii de estimare, are următoarea valoare:

$$P = [-0.5 \quad -0.5 \quad -0.2 \quad -0.2]^T; C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Implementarea observerului Luenberger extins pentru procesul de tratare a apelor uzate cu nămol activ se face utilizând programele *Princ102.m* și *Ord102.m*, prezentate în continuare în anexa CD. Rezultatele obținute, utilizând observerul Luenberger extins, sunt prezentate în Figura 3, din figură observându-se o bună convergență a estimatorului implementat.

Concluzii privind estimatoarele Luenberger extins și Kalman extins

Din studiul estimatoarelor propuse, observer Luenberger extins și filtrul Kalman extins, pot fi trase următoarele concluzii:

1. În lucrare au fost propuși algoritmi de implementare a filtrului Kalman extins și a observerului Luenberger extins utilizând rutinele Matlab. Cele două metode de estimare prezentate oferă bune rezultate în privința convergenței mărimilor estimate către valorile reale. În cazul sistemelor de ordin superior, ele au dezavantajul dificultății de implementare. Acest dezavantaj poate fi înlăturat prin utilizarea rutinelor Matlab *kalman*

și place.

2. Filtrul Kalman extins oferă foarte bune rezultate în prezența zgomotelor de proces și de măsură, în timp ce observerul Luenberger extins are o sensibilitate mare la prezența zgomotului de măsură.

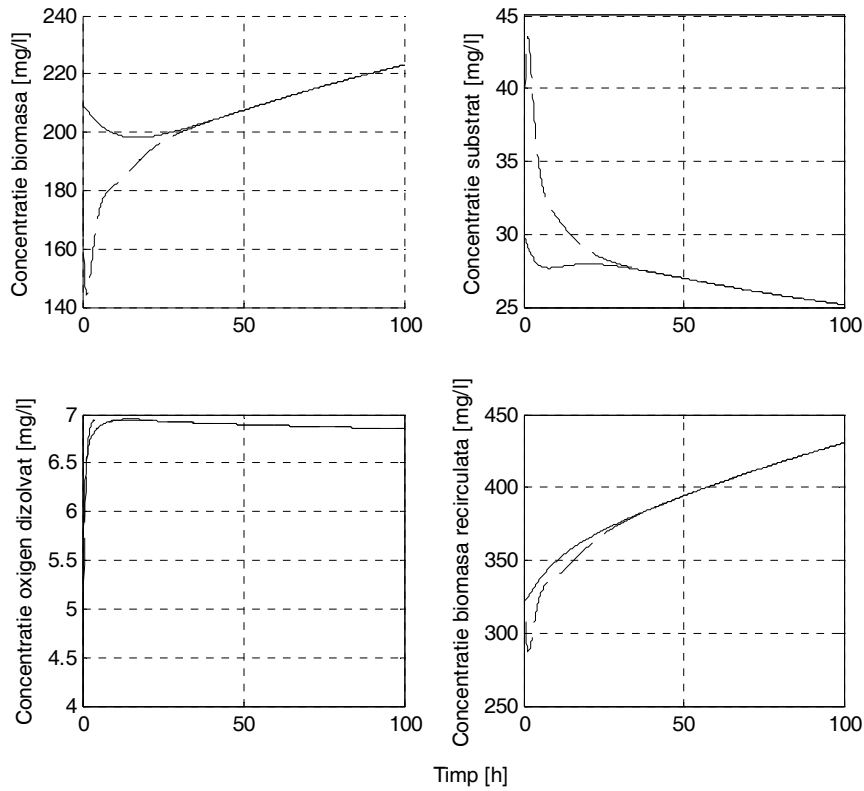


Figura 3: Estimarea stării utilizând observerul Luenberger extins (linie continuă: variabile proces, linie întreruptă: estimațiile acestora)

5. ESTIMAREA STĂRII PROCESULUI DE TRATARE A APELOR UZATE FOLOSIND ESTIMATOR H_∞

5.1 Definirea normei H_∞

Definiția 1: Pentru un semnal $v(t)$ definit pentru $t \geq 0$, norma L_2 a semnalului este rădăcina pătrată a integralei lui $v(t)^2$:

$$\|v\|_2 \triangleq \left(\int_0^\infty v(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad (34)$$

O interpretare fizică a normei L_2 este aceea că $\|v\|_2^2$ este proporțională cu energia totală asociată cu semnalul $v(t)$. Conform cu definiția transformatei Laplace avem:

$$V(s) = \int_0^\infty v(t)e^{-st} dt \quad (35)$$

Analog cu (34), putem defini norma L_2 a semnalului transformat în Laplace $V(s)$ pe axa imaginară:

$$\|V\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |V(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (36)$$

Conform teoremei lui Parseval, normele L_2 în domeniul timp și în domeniul frecvență sunt egale (Toivonen, 1998):

$$\|v\|_2 = \|V\|_2 \quad (37)$$

Norma L_2 este un caz special al normei L_p , ce este definită astfel:

$$\|v\|_p \triangleq \left(\int_0^{\infty} |v(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p \geq 1 \quad (38)$$

Se pot defini normele L_p și în domeniul Laplace, analog cu (26), dar nu există nici o relație corespunzătoare teoremei lui Parseval pentru $p \neq 2$. Dacă $p \rightarrow \infty$, norma L_p tinde către așa numita normă ∞ , sau norma L_{∞} , ce poate fi definită astfel:

$$\|v\|_{\infty} \triangleq \max_t |v(t)| \quad (39)$$

presupunând că există un maxim. Dar, în general, nu poate fi garantată existența unui maxim în (39), deci corect este definirea normei L_{∞} ca supremum al valorii absolute (Green și Limebeer, 1995):

$$\|v\|_{\infty} = \sup_t |v(t)| \quad (40)$$

Similar se poate defini norma L_{∞} în domeniul Laplace:

$$\|V\|_{\infty} = \sup_{\omega} |V(j\omega)| \quad (41)$$

Fie un sistem linear monovariabil cu funcția de transfer $G(s)$. Norma H_{∞} a acestui sistem este definită ca:

$$\|G\|_{\infty} \triangleq \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (42)$$

Pornind de la definiția $|G(j\omega)|$, ca fiind factorul cu care este amplificat de către sistem un semnal sinusoidal de intrare de frecvență ω , se poate obține o interpretare fizică a normei H_{∞} a unui sistem. Astfel norma H_{∞} este o măsură a celui mai mare factor cu care orice semnal sinusoidal de intrare este amplificat de către sistem. Fie un semnal $v(t)$ cu transformata Laplace $V(s)$, astfel încât norma L_2 dată de (34) sau (36) să fie mărginită. În aceste condiții ieșirea sistemului $Y(s) = G(s) \cdot V(s)$ are norma L_2 , dată de (36), mărginită de $\|G\|_{\infty} \cdot \|V\|_2$ (Toivonen, 1998):

$$\|G \cdot V\|_2 \leq \|G\|_{\infty} \cdot \|V\|_2 \quad (43)$$

Aceasta implică:

$$\|G\|_{\infty} \geq \frac{\|G \cdot V\|_2}{\|V\|_2}, \text{ pentru } \forall V \neq 0 \quad (44)$$

În aceste condiții norma H_{∞} poate fi caracterizată astfel:

$$\|G\|_{\infty} = \sup \left\{ \frac{\|G \cdot V\|_2}{\|V\|_2}, V \neq 0 \right\} \quad (45)$$

Deci, norma H_{∞} dă factorul maxim prin care sistemul amplifică norma L_2 a oricărei intrări, sau altfel spus este maximul transferului energetic de la intrare la ieșire. În aceste condiții $\|G\|_{\infty}$ este numit și câștigul sistemului. Fie un sistem multivariabil, având matricea de transfer de ordinul $p \times m$. Norma H_{∞} a matricei de transfer $G(s)$ este definită astfel:

$$\|G\|_{\infty} \triangleq \sup_{\omega} \|G(j\omega)\| \quad (46)$$

unde $\|G(j\omega)\|$ este câștigul maxim al lui G la frecvența ω și este dat de formula următoare:

$$\|G(j\omega)\| = \max_v \left\{ \frac{\|G(j\omega) \cdot v\|}{\|v\|}, v \neq 0, v \in \mathbb{C}^m \right\} \quad (47)$$

unde $\|v\|$ este norma euclidiană a unui vector complex $v = [v_1, \dots, v_m]^T \in \mathbb{C}^m$:

$$\|v\| = \left(|v_1|^2 + \dots + |v_m|^2 \right)^{1/2} \quad (48)$$

Se poate demonstra că norma matriceală $\|G(j\omega)\|$ este egală cu valoarea singulară maximă $\bar{\sigma}(G(j\omega))$ a matricei $G(j\omega)$ (Zhou și Doyle, 1998). În aceste condiții norma H_{∞} a unui sistem multivariabil poate fi exprimată astfel:

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (49)$$

5.2 Filtrul H_{∞} liniar

Fie un sistem dinamic descris de ecuațiile:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D_1(t)w(t) \quad (50)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D_2(t)v(t) \quad (51)$$

unde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, iar $w(t)$ și $v(t)$ reprezintă vectorii zgomotului de proces și de măsură. Zgomotul se consideră a fi alb, necorelat, de medie zero și covarianță Q și, respectiv, R . Problema filtrării constă a găsi o estimare $\hat{x}(t)$ a lui $x(t)$, utilizând măsurătorile lui y până la momentul t . Astfel se impune ca filtrul să minimizeze funcția cost (Nagpal și Khargonekar, 1991):

$$J = \sup_{0 \neq (x_0, w) \in \mathbb{R}^n \times L_2} \frac{\|x - \hat{x}\|_2^2}{\|w\|_2^2 + x_0^T S x_0}, x(0) = x_0, S = S^T > 0 \quad (52)$$

unde S este o măsură a relativei importanțe a incertitudinilor datorate necunoașterii stării inițiale în raport cu incertitudinile cauzate de proces și de zgomotul de măsură. O valoare mică aleasă pentru S reflectă o incertitudine mai mare privind condițiile inițiale.

Definiția 2: Sistemul descris de ecuațiile (50) și (51) este detectabil dacă există o funcție mărginită $K(t)$, astfel încât sistemul $\dot{x}(t) = (A(t) - K(t)C(t))x(t)$ este exponențial stabil. Sau se mai poate spune că (C, A) este detectabilă.

Presupunând că (C, A) este detectabilă, atunci poate fi formulată următoarea teoremă:

Teorema 1: (Nagpal și Khargonekar, 1991) Fie un sistem având condiția inițială necunoscută și un orizont de timp finit $T < \infty$.

1) Există un filtru astfel încât $J < \gamma^2$, $\gamma > 0$, dacă și numai dacă există o matrice simetrică $P(t) > 0$, pentru $t \in [0, T]$, care este continuă și satisface ecuația:

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + P(t)\left(\frac{1}{\gamma^2}I - C^T(t)R^{-1}C(t)\right)P(t) + D_1QD_1^T \quad (53)$$

unde I este matricea unitate, iar $P(0) = S^{-1}$.

2) Mai mult, dacă (53) este satisfăcută, un filtru care respectă condiția $J < \gamma^2$ este dat de ecuațiile:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)) \quad (54)$$

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1} \quad (55)$$

Se observă că filtrul H_∞ are o structură similară cu a filtrului Kalman. Dacă $\gamma \rightarrow \infty$, atunci ecuația (53) devine ecuația diferențială matriceală Riccati, iar filtrul (54)-(55) devine filtrul Kalman. Se face de asemenea observația că pentru estimare se poate selecta parțial vectorul stărilor:

$$z(t) = C_1(t)x(t) \quad (56)$$

filtrul păstrându-și aceleași proprietăți.

5.3 Filtrul H_∞ extins

Fie sistemul neliniar în forma generală:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + D_1(t)w(t) \quad (57)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) + D_2(t)v(t) \quad (58)$$

unde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

Filtrul H_∞ extins este descris de ecuația următoare:

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + K(\hat{x}(t), u(t)) \cdot (h(x(t), u(t)) - h(\hat{x}(t), u(t))) \quad (59)$$

unde matricea de amplificare a filtrului este dată de ecuația:

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1} \quad (60)$$

Matricea simetrică $P(t)$ se obține prin rezolvarea la fiecare moment de timp a ecuației Riccati modificată:

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + P(t)\left(\frac{1}{\gamma^2}I - C^T(t)R^{-1}C(t)\right)P(t) + D_1QD_1^T \quad (61)$$

unde: $A(t) = \frac{\partial f(\hat{x}(t), u(t))}{\partial x}$, $C(t) = \frac{\partial h(\hat{x}(t), u(t))}{\partial x}$.

O dezvoltare a lui $f(\cdot, \cdot)$ în jurul lui $\hat{x}(t)$ conduce la:

$$f(x(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), u(t)) = A(t)(x(t) - \hat{x}(t)) + \varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \quad (62)$$

unde $\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t))$ reprezintă termenii de ordin superior din dezvoltare.

Lema 1: (Konrad ș.a., 1999) Fie vectorii reali $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ și $u \in \mathbb{R}^m$, matricea simetrică Π de dimensiune $n \times n$ și funcția $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot)$ ce respectă condiția:

$$\|\varphi(x, \hat{x}, u)\| \leq \kappa \|x - \hat{x}\| \quad (63)$$

pentru un $\kappa \in \mathbb{R}^+$. Dacă se alege $\gamma \in \mathbb{R}^+$ care să respecte condiția: $\kappa < \frac{\sqrt{Q}}{\gamma}$, atunci există un $\delta > 0$ astfel încât:

$$2(x - \hat{x})^T \Pi \varphi(x, \hat{x}, u) \leq (x - \hat{x})^T \left(\frac{1}{\gamma^2} I + (Q - \delta) \Pi \right) (x - \hat{x}) \quad (64)$$

Utilizând lema 1, poate fi enunțată teorema de convergență exponențială a filtrului H_∞ extins.

Teorema 2: (Konrad ș.a., 1999) Fie sistemul nelinier descris de ecuațiile (57) și (58) și un observer dat de ecuațiile (59)-(61). Fie $\gamma > 0$ și o matrice pozitiv definită R , astfel încât să fie respectate următoarele condiții:

1) Pentru orice soluție $\hat{x}(t)$ a ecuației observerului (59), soluția $P(t)$ a ecuației diferențiale Riccati modificată (61) este mărginită:

$$\underline{p}I \leq P(t) \leq \bar{p}I \quad (65)$$

cu $\underline{p}, \bar{p} > 0$.

2) Termenii neliniari $\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t))$ din relația (62) sunt mărginiți:

$$\|\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t))\| \leq \kappa \|x(t) - \hat{x}(t)\| \quad (66)$$

cu $\kappa < \frac{\sqrt{Q}}{\gamma}$.

În aceste condiții filtrul considerat este un observer exponențial. Mai mult, ecuația erorii de estimare este global exponențial stabilă la zero. Pentru demonstrație se consideră mai întâi ecuația erorii de estimare:

$$\dot{e}(t) = A(t)e(t) - \hat{A}(t)e(t) \quad (67)$$

Ecuația diferențială ce descrie dinamica erorii de estimare este:

$$\dot{e}(t) = (A(t) - K(t)C(t))e(t) + \varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \quad (68)$$

Pentru a demonstra stabilitatea exponențială a erorii se consideră funcția Lyapunov:

$$V(e(t), t) = e(t)^T \Pi(t)e(t) \quad (69)$$

unde $\Pi(t) = P^{-1}(t)$. Conform cu presupunerea 1, avem următoarele limite pentru funcția Lyapunov:

$$\frac{1}{\bar{p}} \|e(t)\|^2 \leq V(e(t), t) \leq \frac{1}{\underline{p}} \|e(t)\|^2 \quad (70)$$

ceea ce implică faptul că funcția Lyapunov considerată este pozitiv definită. Derivata în raport cu timpul a funcției Lyapunov este:

$$\dot{V}(e(t), t) = \dot{e}(t)^T \Pi(t) e(t) + e(t)^T \dot{\Pi}(t) e(t) + e(t)^T \Pi(t) \dot{e}(t) \quad (71)$$

Introducând ecuația erorii (68) în (71), se obține că:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t), t) = & e(t)^T \dot{\Pi}(t) e(t) + (A(t) - K(t)C(t)) e(t) + \varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t))^T \Pi(t) e(t) \\ & + e(t)^T \Pi(t) (A(t) - K(t)C(t)) e(t) + \varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \end{aligned} \quad (72)$$

Ținând cont de (60), ecuația (72) devine:

$$\dot{V}(e(t), t) = e(t)^T \left(\dot{\Pi}(t) + \Pi(t)A(t) + A(t)^T \Pi(t) - 2C^T(t)R^{-1}C(t) \right) e(t) + 2e(t)^T \varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \quad (73)$$

Cum $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, aplicând Lema 1, obținem că:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t), t) \leq & e(t)^T \left(\dot{\Pi}(t) + \Pi(t)A(t) + A(t)^T \Pi(t) - 2C^T(t)R^{-1}C(t) \right) e(t) \\ & + e(t)^T \left((Q - \delta)\Pi(t)\Pi(t) + \frac{1}{\gamma^2} I \right) e(t) \end{aligned} \quad (74)$$

sau rearanjând termenii:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t), t) \leq & e(t)^T \left(\dot{\Pi}(t) + \Pi(t)A(t) + A(t)^T \Pi(t) - C^T(t)R^{-1}C(t) + \frac{1}{\gamma^2} I + Q\Pi(t)\Pi(t) \right) e(t) \\ & + e(t)^T \left(-C^T(t)R^{-1}C(t) - \delta\Pi(t)\Pi(t) \right) e(t) \end{aligned} \quad (75)$$

Dar $\Pi(t) = P^{-1}(t)$, ceea ce implică:

$$\dot{\Pi}(t) = -\Pi(t)\dot{P}(t)\Pi(t) \quad (76)$$

sau dacă se fac calculele:

$$\dot{\Pi}(t) = - \left(\Pi(t)A(t) + A(t)^T \Pi(t) - C^T(t)R^{-1}C(t) + \frac{1}{\gamma^2} I + Q\Pi(t)\Pi(t) \right) \quad (77)$$

Introducând (77) în (75) rezultă că:

$$\dot{V}(e(t), t) \leq e(t)^T \left(-C^T(t)R^{-1}C(t) - \delta\Pi(t)\Pi(t) \right) e(t) \quad (78)$$

Ținând cont de limitele impuse în (65) se obține inegalitatea:

$$\dot{V}(e(t), t) \leq -\frac{\delta}{\bar{p}^2} \|e(t)\|^2 \quad (79)$$

ceea ce implică faptul că derivata funcției Lyapunov este negativ definită. Din relațiile (70) și (79) se poate trage concluzia că ecuația diferențială (68) are un punct de echilibru global exponențial stabil la zero (Vidyasagar, 1993). Aceasta include și faptul că observerul considerat este un observer exponențial.

5.4 Estimarea stării procesului de tratare a apelor uzate cu nămol activ

Fie procesul de tratare a apelor uzate cu nămol activ descris de ecuațiile (13)-(17). Pentru acest sistem neliniar se consideră că sunt măsurabile substratul organic (S) și oxigenul dizolvat (DO), dorindu-se estimarea întregului vector de stare. Pentru proiectarea filtrului H_∞ extins matricele A și C sunt cele prezentate în cadrul paragrafului 3.2. De asemenea, se consideră că P este o matrice simetrică de ordinul 4, D_1 este egală cu matricea unitate ($D_1 = I_4$), iar $\gamma = 1$. În aceste condiții, rezultatele simulării sunt prezentate în Figura 4. Din

figură se observă o bună comportare a filtrului H_∞ extins, în condițiile prezenței atât a zgomotului de proces, cât și a zgomotului de măsură.

Programele de simulare (*Model103.m* și *Func103.m*) se găsesc în anexa CD.

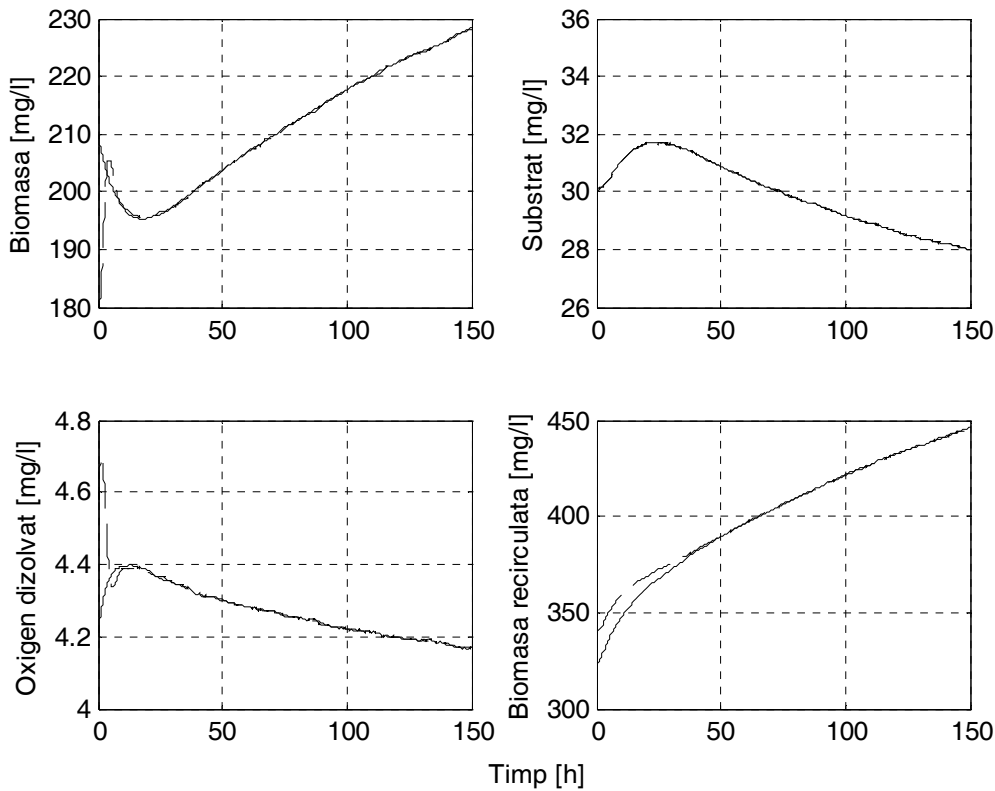


Figura 4: Estimarea stării procesului de tratare a apelor uzate cu nămol activ (linie continuă: variabile proces, linie întreruptă: estimațiile acestora)

6. ESTIMAREA STĂRII ȘI PARAMETRILOR PROCESULUI DE TRATARE A APELOR UZATE

6.1 Estimator de stare și parametri pentru procese neliniare

Fie sistemul neliniar descris de ecuațiile:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \theta(t), u(t)) + D_1(t)w(t) \quad (80)$$

$$y(t) = h(x_1(t), u(t)) + D_2(t)v(t) \quad (81)$$

unde $x_1(t)$ este vectorul stărilor sistemului, iar $\theta(t)$ este vectorul parametrilor procesului ce se doresc a fi estimați. Acești parametri pot fi modelați ca integroare ce sunt conduse de zgomot alb, și adăugate la stările sistemului (Katebi, 2001). În acest caz, noul vector de stare poate fi scris astfel:

$$x(t) = [x_1(t) \quad \theta(t)] \quad (82)$$

iar funcția sistemului neliniar este:

$$f_1(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), \theta(t), u(t)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

Noului sistem neliniar obținut i se va aplica procedura de proiectare a unui estimator de

stare extins (Barbu, 2006), în care:

$$A(\hat{x}, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, \theta, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, \theta, u)}{\partial \theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{x=\hat{x}} \quad (84)$$

$$C(\hat{x}, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x_1, u)}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}_{x=\hat{x}} \quad (85)$$

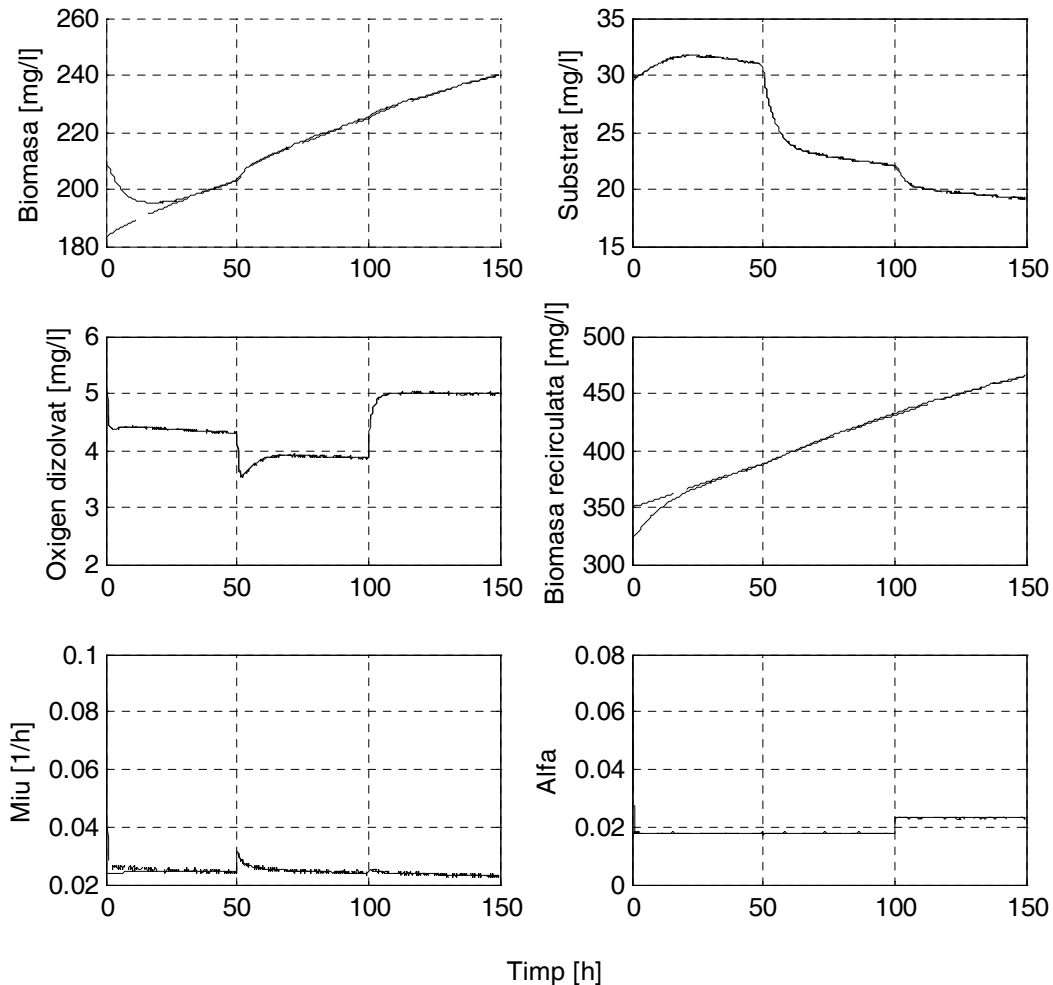


Figura 5: Estimarea stării și parametrilor procesului de tratare a apelor uzate cu nămol activ (linie continuă: variabile proces, linie întreruptă: estimațiile acestora)

6.2 Estimarea stării și parametrilor procesului de tratare a apelor uzate cu nămol activ

În cazul procesului nelinier de tratare a apelor uzate cu nămol activ parametrii cei mai importanți, care vor fi estimați în cadrul acestui grant, sunt: viteza specifică de creștere a microorganismelor $\mu(t)$ și rata transferului de oxigen α . În aceste condiții, vectorul de stare devine: $x = [X \ S \ DO \ X_r \ \mu \ \alpha]$. Metoda de estimare utilizată este filtrul Kalman extins. Matricele de transfer necesare proiectării filtrului Kalman extins pentru estimarea stării și parametrilor procesului nelinier de tratare a apelor uzate cu nămol activ devin:

$$A(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \hat{\mu} - D \cdot (1+r) & 0 & 0 & r \cdot D & \hat{X} & 0 \\ -\frac{\hat{\mu}}{Y} & -D \cdot (1+r) & 0 & 0 & -\frac{\hat{X}}{Y} & 0 \\ -\frac{K_0 \cdot \hat{\mu}}{Y} & 0 & -D \cdot (1+r) - \hat{\alpha} \cdot W & 0 & -\frac{K_0 \cdot \hat{X}}{Y} & W \cdot (DO_{\max} - \hat{DO}) \\ D \cdot (1+r) & 0 & 0 & -D \cdot (\beta + r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (87)$$

De asemenea, se consideră că P este o matrice simetrică de ordinul 6, D_1 este egală cu matricea unitate ($D_1 = I_6$), iar $\gamma = 1$.

În aceste condiții, în Figura 5 sunt prezentate rezultatele simulării. Din figură se observă o bună comportare a filtrului Kalman extins, atât în ceea ce privește estimarea stărilor, cât și a parametrilor procesului. De asemenea, din figură se observă că în cadrul simulării s-a considerat situația în care parametrii își schimbă valoarea în timpul funcționării procesului, algoritmul de estimare propus reușind să urmărească aceste modificări ale parametrilor.

Programele de simulare (*Model104.m* și *Func104.m*) se găsesc în anexa CD.

7. ESTIMAREA STĂRII PROCESULUI DE TRATARE A APELOR UZATE FOLOSIND OBSERVER ÎN REGIM ALUNECĂTOR (SLIDING-MODE)

7.1 Aspecte teoretice ale controlului în regim alunecător

Conducerea sistemelor cu structură variabilă constă în aplicarea unor comenzi de „înalță frecvență”, sistemul în circuit închis obținut funcționând în regim alunecător. Scopul legii de conducere este de a dirija traiectoriile de stare ale sistemului condus către o „suprafață” prespecificată și de a menține pe aceasta traiectoriile de stare. Această suprafață se numește „suprafață de comutație”. Dacă în mod ideal traiectoriile de stare odată ajunse pe suprafață nu o mai părăsesc și alunecă de-a lungul ei, această suprafață se numește „suprafață de alunecare”. Dinamicile sistemului restricționat la această suprafață reprezintă de fapt comportarea sistemului condus.

Proiectarea legii de conducere în regim alunecător se face în două etape (Selișteanu, 2001): în prima etapă se proiectează suprafața de comutație, astfel încât dinamica sistemului pe suprafață să aibă comportarea dorită (stabilitate, urmărire etc.), iar în cea de a doua etapă se proiectează o comandă care conduce sistemul spre suprafața de comutație și îl menține pe această suprafață.

Fie în continuare clasa de sisteme neliniare descrise de ecuația:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + g(x, t)u(x, t) \quad (88)$$

unde $x(t)$ este vectorul de stare n -dimensional, u este comanda m -dimensională și funcțiile f și g sunt presupuse continue cu derivatele în raport cu x continue și mărginite.

Sistemului (88) i se asociază o suprafață de comutație $n - m$ dimensională:

$$\mathbf{S} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / \sigma(x, t) = 0\} \quad (89)$$

unde:

$$\sigma(x,t) = [\sigma_1(x,t) \quad \sigma_2(x,t) \quad \dots \quad \sigma_m(x,t)]^T = 0 \quad (90)$$

Dacă funcțiile $\sigma_i, i=1, \dots, m$ nu depind de timp, atunci suprafața $n-m$ dimensională este determinată în spațiul stărilor \mathbb{R}^n ca intersecția celor m suprafețe $\sigma_i(x,t)=0$. Suprafețele sunt proiectate astfel încât traiectoriile de stare restricționate la $\sigma(x,t)=0$ să aibă o comportare dorită.

După alegerea suprafeței de comutație, regulatorul este proiectat de forma:

$$u_i(x,t) = \begin{cases} u_i^+(x,t), & \text{pentru } \sigma_i(x,t) > 0 \\ u_i^-(x,t), & \text{pentru } \sigma_i(x,t) < 0 \end{cases} \quad (91)$$

unde $u_i(x,t)$ este o componentă a vectorului comenzilor $u(x,t) = [u_1(x,t) \quad u_2(x,t) \quad \dots \quad u_m(x,t)]^T$.

Comanda $u(x,t)$ nu este definită pe suprafața de comutație, iar în afara acesteia valorile u_i^+, u_i^- sunt alese astfel încât vectorii tangențelor la traiectoriile de stare să fie îndreptați spre suprafața de comutație, astfel încât stările sistemului să fie conduse și menținute pe această suprafață.

Regimuri alunecătoare

Comanda $u(x,t)$ este proiectată astfel încât traiectoriile de stare să fie atrase de suprafața de comutație și să rămână pe aceasta. Prin urmare se poate considera că traiectoriile de stare „alunecă” pe suprafață și că sistemul este în **regim alunecător**. Dacă există un regim alunecător atunci S se numește **suprafață alunecătoare**.

Un regim alunecător ideal există atunci când traiectoriile de stare ale sistemului condus satisfac condiția $\sigma(x,t)=0$ pentru $\forall t > t_1$, unde t_1 reprezintă momentul de timp la care traiectoriile de stare intersectează pentru prima dată suprafața de alunecare. Teoretic, acest regim ideal necesită o comutare cu o frecvență infinită. În cazurile reale, din cauza întârzierilor, histeresisurilor etc., comutarea se realizează cu o frecvență finită. În aceste condiții starea oscilează într-o vecinătate a suprafeței de comutație, oscilațiile obținute purtând denumirea de **chattering**.

În Figura 6 sunt ilustrate fenomenele de alunecare și chattering pentru un regim alunecător obținut în cazul unei probleme de urmărire $x = x^*$. Plecând de la orice condiție inițială, traiectoriile de stare ating suprafața într-un timp finit și apoi „alunecă” de-a lungul suprafeței spre x^* .

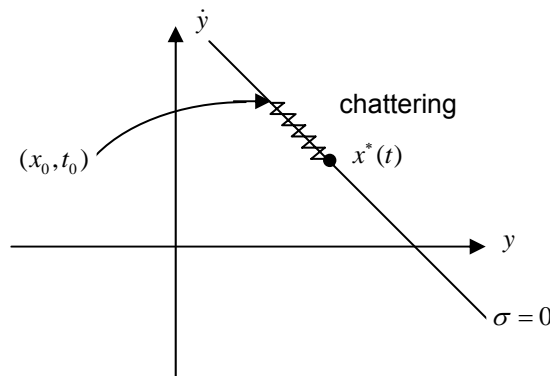


Figura 6: fenomenele de alunecare și chattering pentru un regim alunecător obținut în cazul unei probleme de urmărire $x = x^*$

Condiții de existență a regimurilor alunecătoare

Existența regimului alunecător necesită stabilitatea traiectoriilor de stare pe suprafața de comutație $\sigma(x,t) = 0$. Această stabilitate presupune ca după un timp finit t_1 , starea sistemului $x(t)$ să fie într-o vecinătate a suprafeței $S \{x(t) / \|\sigma(x,t)\| < \varepsilon\}$, pentru $\varepsilon > 0$. Din punct de vedere al reprezentării geometrice a mișcării, sunt de interes traiectoriile din vecinătatea intersecției suprafețelor de discontinuitate σ_i , astfel încât la o mică deviație de la această intersecție, vectorul de stare să revină la intersecție.

Definiția 3: (Utkin, 1978) În spațiul n -dimensional al sistemului (88), un domeniu Γ , $n-m$ dimensional, care aparține intersecției suprafețelor discontinue definite în (89)-(90), se numește *domeniu de regim alunecător* dacă pentru $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ astfel încât oricare traiectorie inițiată într-o vecinătate - δ n -dimensională a lui Γ poate părăsi vecinătatea - ε n -dimensională a lui Γ doar prin vecinătatea - ε n -dimensională a marginilor lui Γ .

Definiția 3 izolează de fapt un domeniu general variabil în timp al coordonatelor sistemului astfel încât pentru proiecția întregii mișcări în subspațiul m dimensional $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ originea este un punct de echilibru stabil „în mic” [Sel01]. Datorită faptului că stabilitatea regimului alunecător poate fi „transcrisă” în termenii clasici ai stabilității sistemelor neliniare poate fi formulată o teoremă de stabilitate de tip Lyapunov pentru determinarea domeniului de regim alunecător.

Teorema 3: (Utkin, 1978) Pentru ca domeniul $n-m$ dimensional Γ să fie un domeniu de regim alunecător este suficient ca într-un domeniu oarecare n dimensional $\Omega \supset \Gamma$ să existe o funcție $V(t, x, \sigma)$, continuu diferentiabilă în raport cu toate argumentele sale și care satisface condițiile:

1) $V(t, x, \sigma)$ este pozitiv definită în raport cu σ , adică pentru t și x arbitrare, $V(t, x, \sigma) > 0$ atunci când $\sigma \neq 0$ și $V(t, x, 0) = 0$; pe sfera $\|\sigma\| \leq \rho > 0$, pentru toți $x \in \Omega$ și $\forall t$ relațiile următoare sunt satisfăcute:

$$\inf_{\|\sigma\|=\rho} V(t, x, \sigma) = h_\rho, h_\rho > 0$$

$$\sup_{\|\sigma\|=\rho} V(t, x, \sigma) = H_\rho, H_\rho > 0$$

unde h_ρ și H_ρ depind doar de ρ cu $h_\rho \neq 0$ atunci când $\rho \neq 0$.

2) Derivata în raport cu timpul a funcției $V(t, x, \sigma)$ de-a lungul traiectoriilor sistemului (88) are supremum negativ pentru toți $x \in \Omega$ exceptând pe cei de pe suprafața de comutare unde comanda nu este definită și unde derivata funcției $V(t, x, \sigma)$ nu există.

Structuri de conducere în regim alunecător

În cea de-a doua etapă a proiectării unui sistem de conducere în regim alunecător, pentru determinarea legii de comandă astfel încât traiectoriile de stare să fie conduse spre suprafața de alunecare și să rămână acolo, este de regulă utilizată o abordare de tip Lyapunov. Pentru sistemul neliniar descris de ecuația (88) se poate utiliza o funcție Lyapunov pătratică de forma:

$$V(t, x, \sigma) = \sigma^T(x, t) \cdot P \cdot \sigma(x, t) \quad (92)$$

unde P este o matrice simetrică pozitiv definită.

Teorema 4: (Utkin, 1978) O condiție suficientă pentru ca suprafața de comutație (89) să fie global atractivă este ca legea de comandă $u(x, t)$ să fie aleasă astfel încât derivata în raport cu timpul a funcției Lyapunov $\dot{V} < 0$, adică $V(t, x, \sigma)$ să fie negativ definită.

Pornind de la Teorema 4, se pot preciza câteva structuri de conducere în regim

alunecător: lege de comandă de tip releu cu amplificare constantă, lege de comandă de tip releu cu amplificare dependentă de stare, lege de conducere cu reacție liniară continuă după stare etc.

Metoda conducerii echivalente

Fie sistemul neliniar (88) rescris sub forma generală:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + g(x, t)u(x, t) = \tilde{f}(x, t, u) \quad (93)$$

și presupunem că există un regim alunecător pe o suprafață de tip (90):

$$\sigma(x, t) = [\sigma_1(x, t) \quad \sigma_2(x, t) \quad \dots \quad \sigma_m(x, t)]^T = 0 \quad (94)$$

Se poate atunci defini o comandă continuă, astfel încât pentru cazul unei poziții inițiale a vectorului de stare pe această suprafață, derivata în raport cu timpul a lui $\sigma(x)$ de-a lungul traiectoriilor de stare ale sistemului (93) este nulă:

$$\dot{\sigma} = \nabla \sigma \cdot \tilde{f}(x, t, u) = 0 \quad (95)$$

unde $\nabla \sigma$ este gradientul funcției σ , adică o matrice $m \times n$ dimensională care are drept linii gradientii funcțiilor $\sigma_i, i = 1, \dots, m$.

Se presupune că există o soluție a ecuației (95) în raport cu comanda. Această soluție, denumită **comandă echivalentă** $u_{ech}(x, t)$, se utilizează în locul comenzii u în (93) (Selișteanu, 2001):

$$\dot{x}(t) = \tilde{f}(x, t, u_{ech}(x, t)) \quad (96)$$

Se observă că o mișcare inițiată în $\sigma(x(t_0)) = 0$, datorită condiției (95), va determina rămânerea pe traiectoriile din $\sigma(x) = 0$.

Această procedură de determinare a comenzii de numește **metoda de conducere echivalentă**, iar ecuația (96) obținută ca urmare a aplicării acestei metode poate fi privită ca o ecuație de regim alunecător care descrie mișcarea în intersecția suprafețelor discontinue $\sigma_i(x) = 0$. Metoda conducerii echivalente implică înlocuirea comenzii discontinue de tip (91) cu o comandă echivalentă, care direcționează tangentele vectorului de stare spre intersecția suprafețelor de discontinuitate.

Dacă sistemul neliniar de forma (88) este liniar în raport cu comanda, comanda echivalentă generală descrisă de (95) poate fi rescrisă:

$$\dot{\sigma} = \nabla \sigma \cdot f(x, t) + \nabla \sigma \cdot g(x, t) \cdot u = 0 \quad (97)$$

Dacă se presupune că matricea $m \times m$ dimensională $\nabla \sigma \cdot g(x, t)$ este nesingulară pentru toți x și t , se poate calcula din (95) comanda echivalentă:

$$u_{ech}(x, t) = -[\nabla \sigma \cdot g(x, t)]^{-1} \nabla \sigma \cdot f(x, t) \quad (98)$$

Prin înlocuirea acestei comenzi în (88) se obține dinamica echivalentă a sistemului pe suprafața de alunecare:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) - g(x, t)[\nabla \sigma \cdot g(x, t)]^{-1} \nabla \sigma \cdot f(x, t) \quad (99)$$

Observație: Poate fi formulată o interpretare fizică a acestei comenzi echivalente (Utkin, 1978). O comandă alunecătoare reală include o componentă lentă la care se adaugă o componentă rapidă. Comportarea procesului condus privit ca obiect dinamic este determinată de componenta lentă, răspunsul procesului la componenta rapidă fiind neglijabil. Metoda conducerii echivalente cere înlocuirea comenzii reale cu o funcție continuă u_{ech} care

nu conține componente rapide. Comanda echivalentă se obține prin utilizarea unui filtru trece jos, a cărui constantă de timp este suficient de mică pentru a permite trecerea componentei lente (care este de fapt comanda echivalentă), dar suficient de mare pentru a elimina componenta de înaltă frecvență.

7.2 Estimator neliniar de stare în regim alunecător

Fie sistemul neliniar descris de ecuațiile:

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad (100)$$

$$y = h(x) \quad (101)$$

unde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

Observer în regim alunecător pentru sisteme neliniare fără intrări

Se consideră mai întâi cazul unui sistem fără intrări ($B(x)=0$) și cu o singură ieșire ($p=1$). Pentru acest sistem se introduc următoarele notații:

$$H(x) = [h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)]^T \quad (102)$$

unde:

$$h_1(x) = h(x) \quad (103)$$

$$h_i(x) = \frac{\partial h_{i-1}(x)}{\partial x} f(x) \quad (104)$$

cu $i = 2, \dots, n$.

Se observă că $h_{i+1}(x)$ este derivata Lie de ordinul i a funcției $h(x)$ de-a lungul traiectoriilor sistemului:

$$h_i(x) = L_f^{i-1} h(x) \quad (105)$$

Se fac următoarele presupuneri asupra funcțiilor $f(x)$ și $h(x)$:

- 1) Funcțiile $f(x)$ și $h(x)$ sunt continue, derivatele parțiale introduse anterior există și sunt continue;
- 2) Pentru un domeniu dat $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ al condițiilor inițiale ale sistemului (100), ce se presupune a fi mărginit, toate soluțiile sistemului (100) aparțin domeniului $X \subset \mathbb{R}^n$, pentru toți $0 \leq t < \infty$. Se consideră că Jacobianul lui $H(x)$ este nesingular în X :

$$\left| \det \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right| \geq \delta \quad (106)$$

pentru un $\delta > 0$ și orice $x \in X$.

Pentru sistemul neliniar descris de ecuațiile (100) și (101), se poate construi următorul observer în regim alunecător (Drakunov, 1992):

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^{-1} M(\hat{x}) \operatorname{sgn}(V(t) - H(\hat{x})) \quad (107)$$

unde:

$$V(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)]^T \quad (108)$$

$$v_1(t) = y(t) \quad (109)$$

$$v_i(t) = \left(m_{i-1}(\hat{x}) \operatorname{sgn}(v_{i-1}(t) - h_{i-1}(\hat{x}(t))) \right)_{ech}, i = 2, \dots, n \quad (110)$$

și M este o matrice diagonală $n \times n$ dimensională având elementele pozitive:

$$M(\hat{x}) = \operatorname{diag}(m_1(\hat{x}), \dots, m_n(\hat{x})) \quad (111)$$

Teorema 5: (Drakunov și Ozguner, 1992) Considerând presupunerile 1 și 2 satisfăcute atunci pentru orice $t_1 > 0$ există o matrice diagonală $M(\hat{x})$ astfel încât observerul să fie convergent pentru $t > t_1$.

Din limitarea condițiilor inițiale la regiunea X_0 rezultă că toate soluțiile $x(t)$ ce pornesc din X_0 sunt uniform mărginite în orice interval de timp finit $[0, T]$. Presupunerea 2 implică faptul că există o corespondență univocă din domeniul X în domeniul $H(x)$, adică transformarea H este o injecție. În aceste condiții este suficient a se demonstra că eroarea modificată $e(t) = H(x(t)) - H(\hat{x}(t))$ converge la zero într-un timp finit.

Luând în considerare ecuațiile (100), (101) și (107) se obține:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \frac{dH(x(t))}{dt} - \frac{dH(\hat{x}(t))}{dt} = \frac{dH(x(t))}{dt} - \frac{\partial H(\hat{x}(t))}{\partial x} \cdot \dot{\hat{x}} = \frac{dH(x(t))}{dt} - \\ &\frac{\partial H(\hat{x}(t))}{\partial x} \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^{-1} M(\hat{x}) \operatorname{sgn}(V(t) - H(\hat{x})) = \frac{dH(x(t))}{dt} - M(\hat{x}) \operatorname{sgn}(V(t) - H(\hat{x})) \end{aligned} \quad (112)$$

Ținând cont de (104) și (112) rezultă că:

$$\dot{e}_i(t) = h_{i+1}(x(t)) - m_i(\hat{x}) \operatorname{sgn}(v_i(t) - h_i(\hat{x}(t))), i = 1, \dots, n \quad (113)$$

Dacă se alege o funcție Lyapunov de forma $V_1 = \frac{e_1^2}{2}$ și ținând cont că $v_1(t) = h_1(t)$ atunci avem:

$$\dot{V}_1 = e_1 \cdot (h_2(x) - m_1(\hat{x}) \operatorname{sgn}(e_1)) \quad (114)$$

Dacă $|h_2(x)| \leq m_1(\hat{x})$ atunci $\dot{V}_1 < 0$ și apare regimul alunecător. Pe durata regimului alunecător $e_1(t) = h_1(x) - h_1(\hat{x}) = 0$.

În acord cu metoda conducerii echivalente $\dot{e}_1(t) = 0$, ceea ce implică: $h_2(x(t)) = \left(m_1(\hat{x}) \operatorname{sgn}(v_1(t) - h_1(\hat{x}(t))) \right)_{ech}$, sau conform cu (110): $v_2(t) = h_2(t)$. Dacă se alege funcția Lyapunov de forma $V_1 = \frac{e_1^2}{2} + \frac{e_2^2}{2}$ se obține că:

$$\dot{V}_1 = e_1 \cdot (h_2(x) - m_1(\hat{x}) \operatorname{sgn}(e_1)) + e_2 \cdot (h_3(x) - m_2(\hat{x}) \operatorname{sgn}(e_2)) \quad (115)$$

Cum $e_1 = 0$ și dacă $|h_3(x)| \leq m_2(\hat{x})$ atunci $\dot{V}_2 < 0$ și apare regimul alunecător, ceea ce implică $e_2(t) = h_2(x) - h_2(\hat{x}) = 0$.

În manieră similară se demonstrează apariția regimului alunecător pentru toate componentele erorii de observare, ceea ce implică: $e(t) = 0$. Condiția ca regimul alunecător să apară în ecuația (113), pentru fiecare din componentele erorii de observare este ca:

$$|h_i(x)| \leq m_{i-1}(\hat{x}) \quad (116)$$

cu $i = 2, \dots, n$.

În aceste condiții prin alegerea corespunzătoare a lui M se poate obține convergența

observerului în moment de timp finit $t_1 < T$.

Observer în regim alunecător pentru sisteme neliniare cu intrări

Dacă $B(x) \neq 0$ observerul descris prin ecuația (107) poate fi modificat, fără afectarea proprietăților de convergență (Drakunov și Ozguner, 1992):

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^{-1} M(\hat{x}) \operatorname{sgn}(V(t) - H(\hat{x})) + B(\hat{x})u \quad (117)$$

cu condiția ca următoarea ecuație să fie satisfăcută:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x} B(x) \right) = 0 \quad (118)$$

Totuși majoritatea sistemelor, printre care și procesul de tratarea a apelor uzate cu nămol activ, nu satisfac condiția (118). În aceste condiții, în continuare va fi prezentată o metodă de proiectare a unui observer în regim alunecător pentru cazul general al proceselor neliniare.

Observer în regim alunecător pentru sisteme neliniare

Fie sistemul neliniar în forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + g_1(x_1, u) \\ x_3 + g_2(x_1, x_2, u) \\ \vdots \\ x_n + g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, u) \\ f_n(x) + g_n(x, u) \end{pmatrix} \quad (119)$$

pentru care se consideră ca fiind măsurabilă x_1 :

$$y = x_1 \quad (120)$$

și $g_i(\cdot, u=0) = 0$ pentru orice $i = 1, \dots, n$.

Pentru sistemul neliniar descris de ecuația (120), având la bază rezultatele obținute în (Drakunov, 1992), (Barbot ș.a., 2002) propune următorul observer în regim alunecător.

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} \\ \dot{\hat{x}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 + g_1(x_1, u) + \lambda_1 \operatorname{sgn}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \hat{x}_3 + g_2(x_1, \tilde{x}_2, u) + \lambda_2 \operatorname{sgn}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \vdots \\ \hat{x}_n + g_{n-1}(x_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n-1}, u) + \lambda_{n-1} \operatorname{sgn}(\tilde{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) \\ f_n(x_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) + g_n(x_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, u) + \lambda_n \operatorname{sgn}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n) \end{pmatrix} \quad (121)$$

unde:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 &= \hat{x}_2 + \lambda_1 \operatorname{sgn}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \tilde{x}_3 &= \hat{x}_3 + \lambda_2 \operatorname{sgn}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ &\vdots \\ \tilde{x}_n &= \hat{x}_n + \lambda_n \operatorname{sgn}(\tilde{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) \end{aligned}$$

unde funcția **sgn** este filtrată cu un filtru trece jos, aplicându-se astfel o comandă echivalentă.

Teorema 6: (Barbot ș.a., 2002) Considerând sistemul MIMS (Mărginit Intrare Mărginit Stare) în timp finit descris de ecuația (119) și observerul în regim alunecător (121), pentru orice stare inițială și orice intrare mărginită, atunci există o alegere a lui λ_i astfel încât starea observerului \hat{x} este convergentă în timp finit către x .

Demonstrația Teoremei 6 este similară cu cea a Teoremei 5 și conduce la următoarea condiție asupra parametrilor observerului:

$$\lambda_{i-1} > |e_i|_{\max}, i = 2, \dots, n \quad (122)$$

$$\lambda_n > 0 \quad (123)$$

7.3 Transformări neliniare de coordonate

Majoritatea sistemelor neliniare sunt descrise în următoarea formă:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (124)$$

$$y = h(x) \quad (125)$$

Sistemul neliniar (124) poate fi transformat și adus la forma (119) printr-o transformare neliniară de coordonate.

Definiția 4: Fie o schimbare de variabile descrisă de relația:

$$z = \Phi(x) \quad (126)$$

unde $\Phi(x)$ este o \mathbb{R}^n - funcție de n variabile:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \quad (127)$$

care are următoarele proprietăți:

1) $\Phi(x)$ este inversibilă, adică există funcția $\Phi^{-1}(x)$ astfel încât:

$$\Phi^{-1}(\Phi(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (128)$$

2) $\Phi(x)$ și $\Phi^{-1}(x)$ sunt aplicații netede, adică cu derivatele parțiale continue de orice ordin.

Atunci (126) este o transformare care se numește diffeomorfism. Dacă proprietățile 1 și 2 sunt îndeplinite în întreg spațiul \mathbb{R}^n , atunci diffeomorfismul este global.

Sistemul (124) poate fi adus la forma (119) prin intermediul următoarei transformări de coordonate:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (129)$$

cu condiția ca transformarea $\Phi(x)$ să fie un diffeomorfism global.

Definiția 5: Se spune că sistemul (124)-(125) are gradul relativ δ într-un punct x_0 dacă:

- 1) $L_g L_f^k h(x) = 0, \forall x$ dintr-o vecinătate a lui x_0 și $\forall k < \delta - 1$
- 2) $L_g L_f^{\delta-1} h(x_0) \neq 0$

Sistemul neliniar descris de ecuațiile (124)-(125), având gradul relativ $\delta \leq n$ poate fi adus la următoarea formă, identică cu forma normală (119):

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, i = 1, \dots, \delta - 1 \\ \dot{z}_j &= z_{j+1} + L_g L_f^{j-1} h(\Phi^{-1}(z)) \cdot u, j = \delta, \dots, n - 1 \\ \dot{z}_n &= L_f^n h(\Phi^{-1}(z)) + L_g L_f^{n-1} h(\Phi^{-1}(z)) \cdot u \end{aligned} \quad (130)$$

7.4 Estimarea stării procesului de tratare a apelor uzate cu nămol activ

Fie procesul de tratare a apelor uzate cu nămol activ descris de ecuațiile (13)-(17). Pentru acest sistem neliniar se consideră că este măsurabil substratul organic (S), dorindu-se estimarea întregului vector de stare. Modelul procesului poate fi pus în forma (124)-(125) făcând următoarele notații:

$$f(x) = \begin{bmatrix} \mu X \\ -\frac{\mu X}{Y} \\ -\frac{K_0 \mu X}{Y} + \alpha W (DO_{\max} - DO) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (131)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} -(1+r)X + rX_r \\ -(1+r)S + S_{in} \\ -(1+r)DO + DO_{in} \\ (1+r)X - (\beta + r)X_r \end{bmatrix} \quad (132)$$

$$h(x) = S \quad (133)$$

Pentru a construi un observer în regim alunecător pentru acest proces, acesta trebuie mai întâi adus la forma normală (119). Astfel se construiește transformarea de coordonată $\Phi(x)$, dată de (129). Cum $f(x)$ și $h(x)$ nu conțin termeni în X_r , aceasta implică faptul că transformarea $\Phi(x)$ nu conține termeni în X_r . În aceste condiții Jaccobianul transformării va avea forma:

$$d(\Phi(x)) = \begin{bmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \quad (134)$$

deci $\det(d(\Phi(x))) = 0$, ceea ce implică faptul că Jaccobianul transformării nu este nesingular, deci transformarea propusă nu este un diffeomorfism. În aceste condiții, a fost definit un model simplificat al procesului de tratare a apelor uzate cu nămol activ, model care să permită construirea unui observer de stare în regim alunecător. Noul model se obține pe baza următoarelor simplificări: oxigenul dizolvat se consideră ca având o dinamică mult mai rapidă față de evoluția celorlalte variabile de stare, și deci va avea o valoare constantă și

biomasa recirculată este proporțională cu biomasa ($X_r = X \cdot (1+r)/(\beta+r)$). Ambele simplificări sunt plauzibile din punct de vedere practic, simplificări asemănătoare fiind uzuale în literatura de specialitate (Katebi, 2001), (Georgieva și Ilchmann, 2001).

Modelul simplificat este descris de următoarele ecuații de stare:

$$\dot{X} = \mu(t)X(t) - D(t)\beta \frac{1+r}{\beta+r} X(t) \quad (135)$$

$$\dot{S} = -\frac{\mu(t)}{Y} X(t) - D(t)(1+r)S(t) + D(t)S_{in} \quad (136)$$

$$\mu(t) = \mu_{max} \frac{S(t)}{K_s + S(t)} \quad (137)$$

Modelul procesului poate fi pus în forma (124)-(125) făcând următoarele notații:

$$f(x) = \begin{bmatrix} \mu X \\ -\frac{\mu X}{Y} \end{bmatrix} \quad (138)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} -\beta \frac{1+r}{\beta+r} X \\ -(1+r)S + S_{in} \end{bmatrix} \quad (139)$$

$$h(x) = S \quad (140)$$

Derivatele Lie notate $L_f^i h(x)$, $i=1,2,3$ ale modelului simplificat sunt:

$$L_f^0 h(x) = h(x) = S$$

$$L_f^1 h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) = -\frac{\mu X}{Y}$$

$$L_f^2 h(x) = \frac{\partial L_f^1 h(x)}{\partial x} f(x) = -\frac{\mu^2 X}{Y} + \frac{\mu^2 X^2 K_s}{Y^2 S(K_s + S)}$$

cea ce conduce la următoarea transformare de stare:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ -\frac{\mu X}{Y} \end{bmatrix} \quad (141)$$

Jacobianul transformării (141) este:

$$d(\Phi(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial X} & \frac{\partial h(x)}{\partial S} \\ \frac{\partial L_f h(x)}{\partial X} & \frac{\partial L_f h(x)}{\partial S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\mu}{Y} & -\frac{\mu K_s X}{YS(K_s + S)} \end{bmatrix} \quad (142)$$

și are determinantul $\det(d(\Phi(x))) = \frac{\mu_{max} S}{Y(K_s + S)} \neq 0$, pentru toate situațiile întâlnite în practică

($\mu_{max} \neq 0$ întotdeauna, iar $S=0$ ar presupune lipsa substratului organic, apa ar fi pură). Deci Jacobianul transformării (141) este nesingular, ceea ce implică faptul că transformarea este un diffeomorfism global. Derivata Lie, notată $L_g L_f^0 h(x)$, a modelului simplificat este:

$$L_g L_f^0 h(x) = L_g h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) = -(1+r)S + S_{in}$$

Cum $S_{in} \gg S$ și ținând cont de valoarea parametrului r , rezultă că în practică $L_g L_f^0 h(x) \neq 0$, ceea ce implică faptul că modelul simplificat are gradul relativ 1: $\delta = 1$. Ținând cont de (130), (141) și de valorile derivatelor Lie obținute anterior, atunci rezultă că sistemul transformat este descris de următoarele ecuații:

$$\dot{z}_1 = z_2 + D(S_{in} - (1+r)z_1) \quad (143)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{\mu_{max} z_1 z_2}{K_S + z_1} + \frac{K_S z_2^2}{(K_S + z_1) z_1} + D \left(-z_2 \beta \frac{1+r}{\beta+r} + \frac{K_S z_2}{(K_S + z_1) z_1} (S_{in} - (1+r)z_1) \right) \quad (144)$$

pentru care se consideră măsurabil z_1 . Transformata inversă a sistemului (143)-(144), ce conduce la sistemul (135)-(136) este dată de ecuația:

$$x = \Phi^{-1}(x) = \begin{bmatrix} S \\ -\frac{Y(K_S + z_1)z_2}{\mu_{max} z_1} \end{bmatrix} \quad (145)$$

Pentru sistemul transformat, descris de ecuațiile (143) și (144), se construiește următorul observer în regim alunecător:

$$\dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 + D(S_{in} - (1+r)z_1) + \lambda_1 \operatorname{sgn}(z_1 - \hat{z}_1) \quad (146)$$

$$\dot{\hat{z}}_2 = \frac{\mu_{max} z_1 \hat{z}_2}{K_S + z_1} + \frac{K_S \hat{z}_2^2}{(K_S + z_1) z_1} + D \left(-z_2 \beta \frac{1+r}{\beta+r} + \frac{K_S \hat{z}_2}{(K_S + z_1) z_1} (S_{in} - (1+r)z_1) \right) + \lambda_2 \operatorname{sgn}(\hat{z}_2 - z_2) \quad (147)$$

cu: $\tilde{z}_2 = \hat{z}_2 + \lambda_1 \operatorname{sgn}(z_1 - \hat{z}_1)$ și în care s-au considerat următoarele valori pentru parametrii λ : $\lambda_1 = 1.5$ și $\lambda_2 = 1$ (Barbu și Caraman, 2006).

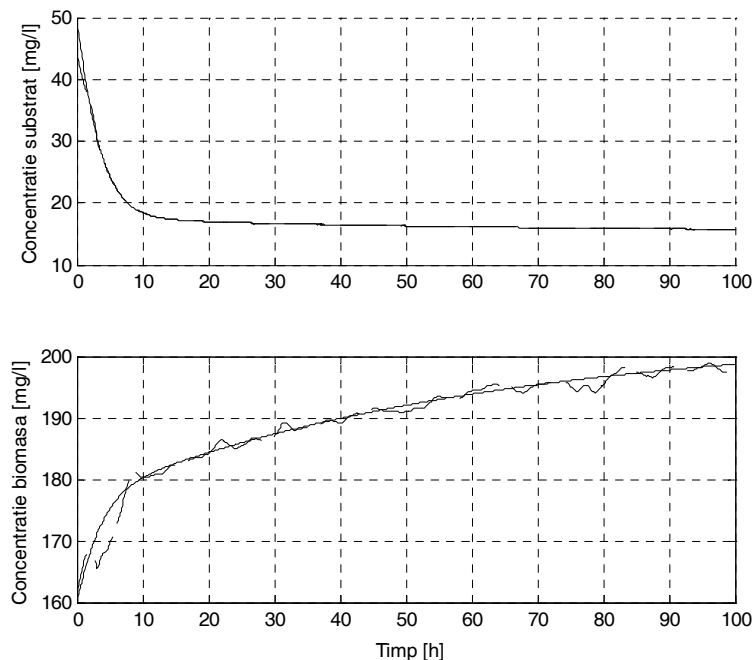


Figura 7: Estimarea stării procesului de tratare a apelor uzate cu nămol activ simplificat (linie continuă: variabile proces, linie întreruptă: estimațiile acestora)

Rezultatele obținute cu observerul în regim alunecător proiectat anterior sunt prezentate în Figura 7. Din figură se observă o convergență rapidă a mărimilor estimate către valorile

obținute din proces. De asemenea, din figură se poate efectua analiza asupra estimării variabilei biomasă. În aceste condiții, funcția semn (sgn) va fi înlocuită cu funcția de comutație netedă tangență hiperbolică (\tanh) (Barbu și Caraman, 2007). Rezultatele obținute, prezentate în Figura 8, justifică alegerea făcută privind funcția de comutație. În final observerul propus a fost testat din punct de vedere al comportării în prezența zgomotului de măsură, ce afectează măsurătorile de substrat organic, rezultatele obținute fiind prezentate în Figura 9. Din figură se observă că estimatorul propus nu reușește decât într-o mică măsură să elimine zgomotul de măsură, influența zgomotului asupra mărimii estimate biomasă fiind destul de importantă.

Programele de simulare (*Model105.m* și *Func105.m*) se găsesc în anexa CD.

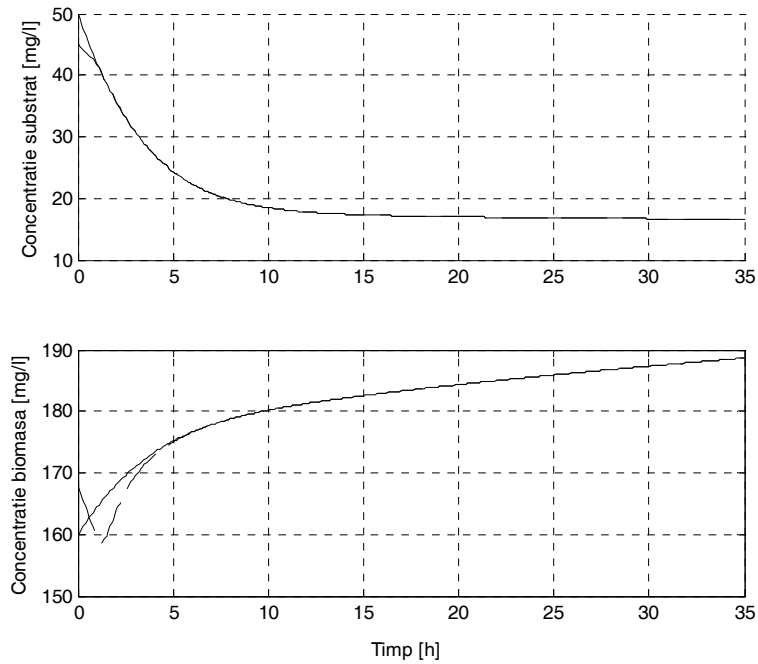


Figura 8: Estimarea stării procesului de tratare a apelor uzate simplificat în cazul utilizării funcției \tanh (linie continuă: variabile proces, linie întreruptă: estimațiile acestora)

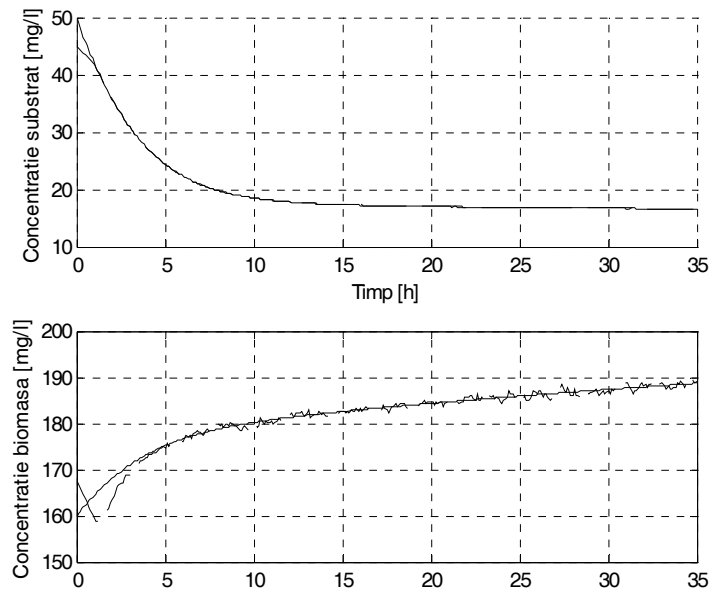


Figura 9: Comportarea observerului în regim alunecător în prezența zgomotului de măsură (linie continuă: variabile proces, linie întreruptă: estimațiile acestora)

Concluzii privind estimatoarele H_∞ și sliding-mode

Rezultatele obținute în urma simulărilor efectuate pentru cele două structuri de estimare propuse, filtrul H_∞ extins și observerul în regim alunecător, conduc la următoarele concluzii:

- ambele metode oferă timpi buni de convergență, cu un plus pentru observerul în regim alunecător pentru care timpul de convergență poate fi impus prin alegerea parametrilor de proiectare;
- observerul în regim alunecător oferă rezultate mai bune în ceea ce privește robustețea la incertitudini parametrice, în timp ce filtrul H_∞ extins oferă rezultate mai bune în ceea ce privește comportarea în prezență zgomotului;

Bibliografie

1. (Barbot, ș.a., 2002) Barbot, J.P., Djemai, M. And Boukhobza, T., *Sliding Mode Observers*, in *Sliding Mode Control in Engineering*, Editors: W. Perruquetti and J.P. Barbot, Marcel Dekker Inc.
2. (Barbu și Caraman, 2006) Barbu, M., Caraman, *State Estimation of a Wastewater Treatment Process Using a Sliding-Mode Observer*, Scientific Bulletin of “Politehnica” University of Timisoara, Transactions on Automatic Control and Computer Science, Vol. 51 (65), ISSN 1224-600X.
3. (Barbu, 2006) Barbu, M., *Contribuții privind conducerea automată avansată a proceselor biotehnologice*, Teză de doctorat, Universitatea „Dunărea de Jos” din Galați.
4. (Barbu, ș.a., 2007) Barbu, M., Caraman, S., Design of a sliding-mode observer for a biotechnological process, IFAC 10th Computer Applications in Biotechnology, Cancun, Mexic.
5. (Caraman și Barbu, 2005) Caraman, S. , Barbu, M., *Modelarea și conducerea proceselor biotehnologice. Lucrări practice. Volumul 1: Modelarea și estimarea stării și parametrilor proceselor biotehnologice*, Editura Fundatiei Universitatii „Dunarea de Jos” din Galați.
6. (Drakunov, 1992) Drakunov, S., *Sliding Mode Observers Based on Equivalent Control Method*, Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Tucson, Arizona, pp. 2368-2369.
7. (Drakunov și Ozguner, 1992) Drakunov, S. and Ozguner, U., *Decentralized Sliding Observers for Interconnected Nonlinear Systems*, IEEE International Workshop on Variable Structure and Lyapunov Control of Uncertain Dynamical Systems, Sheffield, England.
8. (Katebi, 2001) Katebi, M.R., *H_∞ estimation in Activated Sludge Process*, Preprints of the 9th IFAC/IFORS/IMACS/IFIP Symposium Large Scale Systems: Theory & Applications – LSS’2001, Bucharest, Romania, pp. 534-539, July 18-20.
9. (Konrad ș.a., 1999) Konrad, R., Sonnenmann, F. and Unbehauen, R., *Nonlinear State Observation Using Hinf Filtering Riccati Design*, In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-44, No. 1, pp.203-208.
10. (Green și Limebeer, 1995) Green, M., Limebeer, D., *Linear Robust Control*, Prentice Hall.
11. (Georgieva și Ilchmann, 2001) Georgieva, P. and Ilchmann, A., *Adaptive I-tracking control of activated sludge processes*, In: *International Journal of Control*, Vol. 74, No. 12, 1247-1259.

12. (Lewis, 1986) Lewis, F., “*Optimal Estimation with an Introduction to Stochastic Control Theory*”, John Wiley & Sons, Inc.
13. (Nagpal și Khargonekar, 1991) Nagpal, K.M. and Khargonekar, P.P., *Filtering and smoothing in an Hinf setting*, In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-36, No. 2, pp.152-166.
14. (Nejjari ș.a., 1999) Nejjari, F., et al., *Non-linear multivariable adaptive control of an activated sludge wastewater treatment process*, In: *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 13, Issue 5, pp. 347-365.
15. (Selișteanu, 2001) Selișteanu, D., *Modelarea și conducerea bioreactoarelor*, Editura Universitatea, Craiova.
16. (Toivonen, 1998), Toivonen, H.T., *Advanced Control Methods*, Ebo Akademi University, Finland.
17. (Utkin, 1978) Utkin, V.I., *Sliding regimes and their applications in variable structure systems*, MIR Publishers, Moscow.
18. (Vidyasagar, 1993) Vidyasagar, M., *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall.
19. (Zhou și Doyle, 1998) Zhou, K., Doyle, J.C., *Essential of Robust Control*, Prentice Hall.