Raport Stiintific
Grant CEEX-MENER Nr.717/24.07.2006, Etapa II
Universitatea: “Dunărea de Jos” din Galaţi

Obiectivul V:
Analiza identificarii structurale si identificarea practica (experimentala) a parametrilor proceselor de epurare a rezidurilor din industria alimentara (raport stiintific)

Activitatea V.1:
Analiza identificarii structurale si identificarea practica (experimentala) a parametrilor proceselor de epurare a rezidurilor din industria alimentara.

IDENTIFICABILITATEA STRUCTURALĂ A PROCESELOR BIOTEHNOLOGICE

1. INTRODUCERE

Identificarea modelelor dinamice ce descriu procesele de tratare a apelor reziduale este caracterizată prin două proprietăţi importante:

1. De cele mai multe ori, modelele sunt foarte complexe – modele neliniare de ordin superior, incorporând un mare număr de variabile de stare şi parametrii.
2. În general, nu există senzori ieftini şi fiabili şi nici tehnici bine puse la punct pentru măsurarea celor mai importante variabile de stare. În ciuda eforturilor considerabile depuse în această direcţie, metodologia de măsurare este considerată în continuare a fi partea cea mai slabă în modelarea şi controlul proceselor biotehnologice.

Ambele probleme sunt comune tuturor proceselor biotehnologice, având o importanţă crucială, în special, în procesele de tratare a apelor reziduale datorită naturii complexe inerente a acestor procese ce implică mai multe populaţii microbiene, adesea greu de identificat folosind instrumentaţia existentă. Valorile parametrilor unui model vor fi obţinute pe baza informaţiilor apriorice despre proces şi a datelor experimentale. Calitatea estimaţiilor parametrice va depinde de cantitatea şi calitatea informaţiilor culese în timp real şi utilizate de algoritmii de identificare. În afara acestor limitări generate de datele disponibile, o altă problemă legată de identificarea parametrică a proceselor o constituie faptul că pot exista numeroase corelaţii între parametrii modelului. Din cauza complexităţii modelului şi a lipsei senzorilor, studiul identificabilităţii modelelor dinamice înainte de orice fel de identificare, este, cu siguranţă, o problemă cheie. Problema centrală care se pune în analiza identificabilităţii este următoarea:

Se presupune că un anumit număr de variabile de stare pot fi măsurate; pe baza structurii modelului (identificabilitate structurală) sau pe baza tipului şi calitătii datelor disponibile (identificabilitate practică), ne putem aştepta ca pe baza estimării parametrilor să se obţină o valoare unică pentru parametrii modelului?

Cu alte cuvinte, se pune întrebarea: „Care este folosul încercării de a calibra parametrii pentru un model care este, structural sau practic, neidentificabil ?”. Formularea anterioară este destul de generală, dar răspunsul despre analiza identificabilităţii este de multe ori mult mai subtil: nu este doar un răspuns ”da” sau ”nu”, ci când acesta conduce la anumite concluzii, acestea pot indica faptul că anumite subseturi sau combinaţii ale parametrilor modelului sunt apriori identificabile.

2. CADRUL TEORETIC

Noţiunea de identificabilitate structurală este legată de posibilitatea de a da o valoare unică fiecărui parametru al modelului matematic. Cu alte cuvinte, problema identificabilităţii structurale a unui model poate fi formulată astfel: dându-se o structură de model şi un set perfect de date (adică ce corespund perfect modelului) ale variabilelor modelului, sunt toţi parametrii modelului identificabili? Din analiza identificabilităţii structurale se trage concluzia că doar anumite combinaţii ale parametrilor modelului sunt identificabile. Dacă numărul combinaţiilor rezultate este mai mic decât numărul de parametrii ai modelului original sau dacă nu există o relaţie de unu la unu între ambele seturi de parametri, atunci sunt necesare cunoştinţe apriorice despre anumiţi parametri pentru ca toţi parametrii să poată fi identificabili. Un exemplu simplu poate ilustra foarte uşor acest lucru: în modelul $y = ax_1 + bx_2 + c(x_1 + x_2)$, doar combinaţiile *a+b* şi *a+c* sunt structural identificabile (şi nu toţi cei trei parametrii a, b, c); doi parametrii (de exemplu a şi b) vor fi identificabili dacă valoarea lui c este cunoscută apriori.

Pentru sistemele liniare, identificabilitatea structurală este mai uşor de înţeles, şi, în afara modelelor identificabile clasice (aşa cum sunt modelele dinamice în formă canonică (Sontag, 1998, Ljung, 1999, Franklin and Powel, 1995)), există un număr de teste pentru identificabilitate (spre exemplu, metoda transformatei Laplace, dezvoltarea în serie Taylor a observaţiilor, abordarea folosind matricea Markov a parametrilor, abordarea folosind matricea modală etc. - Godfrey si Di Stefano, 1987). În orice caz, pentru modele neliniare în raport cu parametrii problema este mult mai complexă (aceste probleme necesită de obicei utilizarea soft-urilor de calcul simbolic).

Pe de altă parte, identificabilitatea practică este legată de calitatea datelor şi de conţinutul informaţional al acestora: sunt datele disponibile suficiente pentru identificarea parametrilor modelului şi pentru obţinerea unor valori numerice precise a acestora? În cazul unui model de forma $y = ax_1 + bx_2$ parametrii sunt structural identificabili dar nu sunt practic identificabili în cazul în care condiţiile experimentale sunt astfel încât variabilele independente x_1 şi x_2 sunt tot timpul proporţionale ($x_1 = \alpha x_2$).

3. NOTIUNEA DE IDENTIFICABILITATE STRUCTURALA IN CAZUL SISTEMELOR NELINIARE

3.1. Exemplu

Se prezinta un exemplu simplu. Se consideră un bazin cu agitare continuă (continuous stirred tank reactor) cu o reacţie:

$$A \rightarrow B \tag{1}$$

descrisă de o cinetică de ordinul I. Echilibrul masic pentru substratul *A* este dat de următoarea ecuaţie:

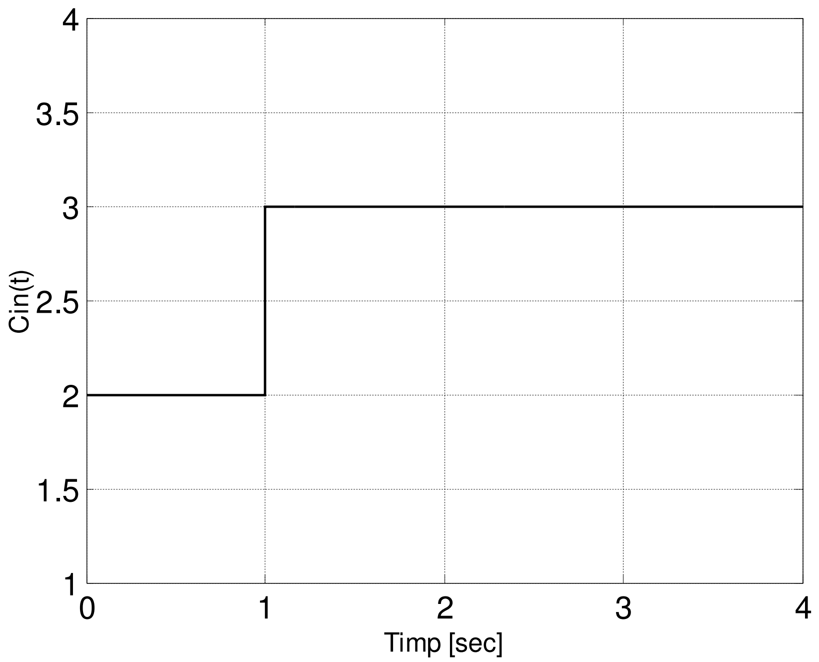
$$\frac{dC}{dt} = -DC + DC_{in} - k_0 C \tag{2}$$

unde: C – concentraţia reactantului A;
C_{in} – concentraţia sa influentă;
D – viteza de diluţie;
k_0 – constantă cinetică.

Se presupune că C şi C_{in} pot fi măsurate iar k_0 şi D sunt necunoscute şi constante, adică aceşti parametri sunt cei ale căror valori trebuie determinate. Aceşti doi parametri sunt structural identificabili. Într-adevăr, dacă spre exemplu, C_{in} se modifică sub formă de treaptă, atunci răspunsul sistemului este dat de relaţia:

$$C(t) = C_0 + \frac{D}{D+k_0}\Delta C_{in}(1-e^{-(D+k_0)t}) \tag{3}$$

unde C_0 este valoarea iniţială a concentraţiei reactantului C şi ΔC_{in} amplitudinea treptei concentraţiei influente. Evoluţiile mărimilor de intrare şi de ieşire sunt prezentate în Figura 1.



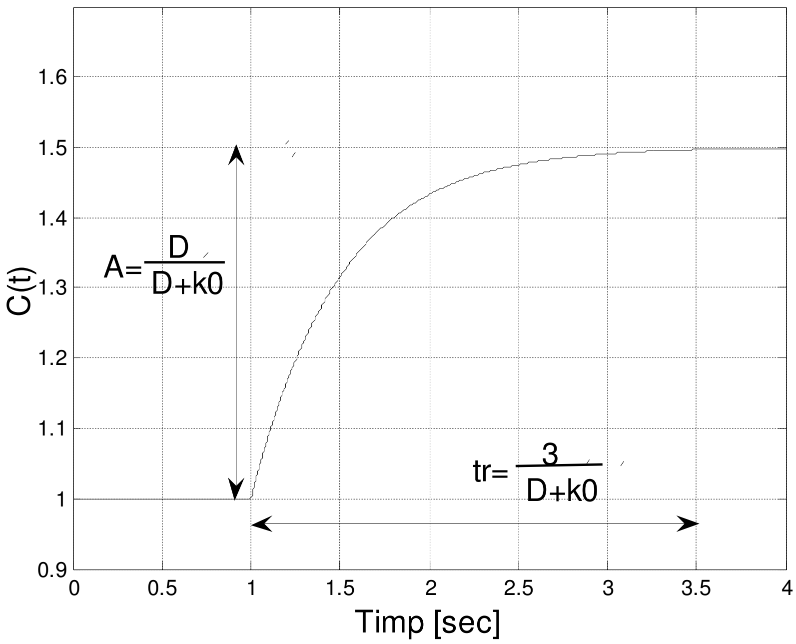


Figura 1: Răspunsul la intrare treaptă pentru sistemul de ordinul I

Din analiza acestor grafice se poate observa că amplitudinea *A* a răspunsului *C(t)* este egală cu diferenţa dintre valoarea iniţială şi valoarea finală (după un timp suficient de lung). Din ecuaţia (3) se observă că *A* este egal cu $\frac{D}{D+k_0}\Delta C_{in}(=C(t=\infty)-C_0)$. Graficul obţinut în Figura 1 poate fi utilizat de asemenea pentru determinarea constantelor de timp ale dinamicii lui *C(t)*. Într-adevăr, din relaţia (3) se poate deduce că 95% din valoarea finală a lui *C(t)* este atinsă la momentul $t_r = \frac{3}{D+k_0}$ de la momentul aplicării semnalului treaptă. Acesta este egal cu de trei ori constanta de timp $\tau = \frac{1}{D+k_0}$. În concluzie, din reprezentarea grafică a răspunsului la semnal treaptă pentru ecuaţia (2), putem deduce amplitudinea răspunsului $A = \frac{D}{D+k_0}\Delta C_{in}$ şi timpul de răspuns $t_r = \frac{3}{D+k_0}$, deci putem calcula uşor parametrii D şi k_0.

Se consideră, în continuare, că dispozitivul de măsură a concentraţiei reactantului oferă un semnal *y* proporţional cu valoarea concentraţiei *C*:

$$y = y_C C \tag{4}$$

Se presupune că acest coeficient de proporţionalitate y_C este necunoscut, adică, în acest context, este un parametru adiţional. Răspunsul la semnal treaptă al lui *y* este similar cu cel din Figura 1, cu excepţia faptului că amplitudinea *A* este acum egală cu $y_C \frac{D}{D+k_0}\Delta C_{in}$. În acest caz, nu mai este posibilă determinarea unică a valorilor parametrilor y_C, *C* şi k_0 din valorile amplitudinii şi a timpului de răspuns. Aceasta înseamnă că cei trei parametrii de mai sus nu sunt identificabili. Mai precis, doar următoarele combinaţii de parametrii sunt identificabile: $\theta_1 = D + k_0$ (din timpul de răspuns $\frac{3}{D+k_0}$), şi $\theta_2 = y_C D(= A(D+k_0) = A\theta_1)$.

3.2 Metoda transformatei Laplace

Exemplul din paragraful anterior ilustrează identificabilitatea structurală pentru cei doi parametrii k_0 şi D, adică proprietatea structurală de a determina în mod unic valorile acestor parametrii în condiţii ”ideale”. De asemenea, exemplul anterior arată lipsa identificabilităţii structurale pentru cei trei parametrii y_C, k_0 şi D, adică proprietatea structurală de a nu determina în mod unic valorile acestor parametri în condiţii ”ideale”. În continuare, se vor generaliza rezultatele din exemplul anterior.

Se consideră un model dinamic $M(\Theta)$ cu parametrizarea $\Theta=[\Theta_1,\Theta_2,\ldots,\Theta_p]^T$, cu q ieşiri $y_i\ (i=\overline{1,q})$ şi m intrări $u_j\ (j=\overline{1,m})$. Dacă modelul este liniar, dinamica sistemului poate fi descrisă, fie ecuaţiile de stare:

$$\frac{dx}{dt}=A(\theta)x(t,\theta)+B(\theta)u(t), \qquad x(0,\theta)=x_0(\theta) \tag{5}$$

$$y(t,\Theta)=C(\Theta)x(t,\Theta) \tag{6}$$

fie prin funcţia de transfer $H(s,\Theta)$, între vectorul de intrare $u(t)$ şi vectorul ieşirii $y(t,\Theta)$, funcţie de transfer ce poate fi obţinută din reprezentarea de stare prin relaţia:

$$H(s,\Theta)=C(\Theta)(sI-A(\Theta))^{-1}B(\Theta) \tag{7}$$

În cazul unui sistem cu o singură intrare şi o singură ieşire (*SISO*) această funcţie de transfer este caracterizată prin raportul a două polinoame de ordinul *n* (*n* este numărul de stări *x*), adică are maxim *2n* parametri. De notat faptul că funcţia de transfer între C_{in} şi C, şi între C_{in} şi y pentru ecuaţiile (2) şi (4) poate fi scrisă formal astfel:

$$H(s)=\frac{b}{s+a}$$

unde $a=D+k_0$, $b=D$, respectiv $y_C=D$.

În acest exemplu, în primul caz, D şi k_0 pot fi uşor obţinuţi dacă se cunosc valorile lui a şi b ($D=a$ şi $k_0=a-b$), în timp ce în al doilea caz, nu se pot distinge y_C şi D din valoarea lui b. Acest lucru sugerează următoarea generalizare: cei *2n* parametrii ai funcţiei de transfer *H(s)* sunt structural identificabili din măsurătorile lui $y(t,\Theta)$. Analiza se poate baza pe răspunsul la impuls al acestui sistem:

$$y(t,\theta)=\sum_{i=1}^{n}c_i(\theta)e^{\lambda_i(\theta)t} \tag{11}$$

Cei *2n* coeficienţi c_i şi λ_i pot fi determinaţi din datele de ieşire $y(t,\Theta)$. De aceea, relaţiile între aceşti coeficienţi şi parametrii funcţiei de transfer sunt foarte importante pentru identificabilitatea structurală. Spre exemplu, dacă se ia în considerare o funcţie de transfer de ordinul doi şi valorile proprii distincte λ_i, se obţine:

$$H(s)=\frac{c_1}{s+\lambda_1}+\frac{c_2}{s+\lambda_2} \tag{12}$$

$$=\frac{(c_1+c_2)s-(c_2\lambda_1+c_1\lambda_2)}{s^2+(\lambda_1+\lambda_2)s+\lambda_1\lambda_2} \tag{13}$$

$$= \frac{\beta_1 s + \beta_2}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2} \tag{14}$$

unde

$$\beta_1 = c_1 + c_2,\ \beta_2 = -(c_1\lambda_2 + c_2\lambda_1),\ \alpha_1 = \lambda_1 + \lambda_2,\ \alpha_2 = \lambda_1\lambda_2 .$$

Aceasta sugerează că, dacă nu există factori comuni între numărătorul şi numitorul funcţiei de transfer, cei *2n* parametri α_i şi β_i pot fi determinaţi din datele de ieşire la fel ca şi cei *2n* coeficienţi c_i şi λ_i. De notat că proprietatea de identificabilitate este validă aproape pentru toate valorile parametrilor. Într-adevăr, pot exista cazuri în care combinaţii particulare ale parametrilor sau pentru anumite funcţii de intrare pot conduce la simplificări poli-zerouri în funcţia de transfer.

Se consideră un sistem format din două reactoare în flux continuu cu volumele V_1 şi V_2, sistem prezentat în figura următoare:

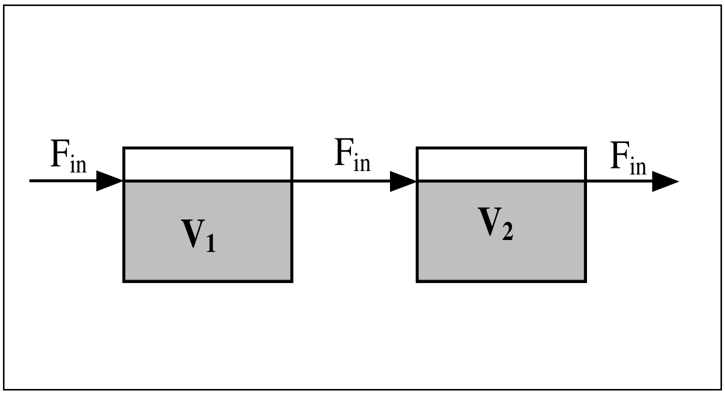


Figura 2. Reactor în flux continuu cu două reactoare

În aceste reactoare are loc un proces simplu de creştere microbiană $S \to X$. Se notează cu $F_{1,in}$, $S_{1,in}$, $F_{2,in}$, $S_{2,in}$ fluxurile de intrare şi concentraţiile substanţelor influente în cele două reactoare şi cu k_0 constanta cinetică. Dinamicile celor două reacţii sunt date de următoarele ecuaţii:

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= \frac{F_{1,in}}{V_1} S_{1,in} + \frac{F_1 - F_{1,in}}{V_1} S_2 - \frac{F_1}{V_1} S_1 - k_0 S_1 \\ \frac{dS_2}{dt} &= \frac{F_{2,in}}{V_2} S_{2,in} - \frac{F_1 + F_{2,in}}{V_2} S_2 + \frac{F_1}{V_2} S_1 - k_0 S_2 \end{aligned} \tag{15}$$

Dacă se consideră drept mărimi de intrare cele două concentraţii influente, ecuaţiile de mai sus pot fi scrise în următoarea formă matriceală:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

unde,

$$a_{11} = -\frac{F_1}{V_1} - k_0,\ a_{12} = \frac{F_1 - F_{1,in}}{V_1} \tag{17}$$

$$a_{21}=-\frac{F_1}{V_2}-k_0,\ a_{22}=-\frac{F_1+F_{2,in}}{V_2}-k_0 \tag{18}$$

$$u_1=S_{1,in},u_2=S_{2,in} \tag{19}$$

$$b_1=\frac{F_{1,in}}{V_1},b_2=\frac{F_{2,in}}{V_2} \tag{20}$$

Se presupune că se poatet măsura concentraţia substratului în ambele reactoare, adică:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Matricea de transfer poate fi uşor obţinută prin utilizarea transformatei Laplace:

$$H(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{Y_1(s)}{U_1(s)} & \dfrac{Y_1(s)}{U_2(s)} \\ \dfrac{Y_2(s)}{U_1(s)} & \dfrac{Y_2(s)}{U_2(s)} \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta(s)}\begin{pmatrix} c_1b_1(s-a_{22}) & c_1b_2a_{12} \\ c_2b_1a_{21} & c_2b_2(s-a_{11}) \end{pmatrix} \tag{22}$$

unde

$$\Delta(s)=s^2-(a_{11}+a_{22})s+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{23}$$

Se va studia acum identificabilitatea pentru câteva situaţii particulare.

Cazul I. $u_1\neq 0,u_2=0$ şi doar y_1 este măsurat. Funcţia de transfer $\dfrac{Y_1(s)}{U_1(s)}$ poate fi scrisă sub forma (14) cu:

$$\beta_1=c_1b_1,\ \beta_2=-c_1b_1a_{22} \tag{24}$$

$$\alpha_1=-(a_{11}+a_{22}),\alpha_2=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{25}$$

Din identificabilitatea structurală a parametrilor $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ şi din relaţiile (24) şi (25) rezultă că doar patru combinaţii ale celor 6 parametrii ai funcţiei $\dfrac{Y_1(s)}{U_1(s)}$ sunt identificabile, şi anume c_1b_1, a_{22}, a_{11} şi $a_{12}a_{12}$. Cu alte cuvinte, cei şase parametri c_1, b_1, a_{22}, a_{11} , a_{12} şi a_{12} nu sunt identificabili, în timp ce cei patru parametri $\theta_1=c_1b_1,\theta_2=a_{22},\theta_3=a_{11},\theta_4=a_{12}a_{21}$ sunt identificabili folosind următoarele relaţii:

$$\theta_1=\beta_1$$
$$\theta_2=-\frac{\beta_2}{\beta_1}$$
$$\theta_3=-\alpha_1+\frac{\beta_2}{\beta_1}$$
$$\theta_4=-\alpha_2-\frac{\beta_2}{\beta_1}\left(-\alpha_1+\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)$$

Cazul II. $u_1 \neq 0, u_2 = 0$ şi sunt măsurate *y₁* şi *y₂*. În acest caz mai apare o măsurătoare suplimentară. Numitorii funcţiilor $\frac{Y_1(s)}{U_1(s)}$ şi $\frac{Y_2(s)}{U_1(s)}$ sunt identici, deci îmbunătăţirea identificabilităţii structurale poate apare doar din numărătorul funcţiei de transfer $\frac{Y_2(s)}{U_1(s)}$, şi anume termenul $b_1c_2a_{12}$. În concluzie, nu se câştigă nimic, deoarece apare un parametru în plus, c_2, şi o combinaţie identificabilă $b_1c_2a_{12}$, cu excepţia cazului în care există cunoştinţe apriorice despre parametrul c_2. O informaţie apriorică poate fi aceea a egalităţii între parametrii c_1 şi c_2 (lucru foarte probabil în cazul analizat). În această situaţie numărătorul funcţiei de transfer $\frac{Y_2(s)}{U_1(s)}$ este egal cu $b_1c_2a_{12}$. Deoarece combinaţia b_1c_1 este identificabilă (vezi cazul I) rezultă că parametrul a_{12} este identificabil. Dar, deoarece a_{11} şi a_{22} sunt de asemenea identificabili, din forma lui α_2 rezultă că şi a_{21} este identificabil.

Cazul III. $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ şi doar y_1 este măsurat. Se va evalua ce se câştigă prin luarea în considerare a ambelor intrări. Se poate trage o concluzie similară celei de la cazul II, adică apare un parametru suplimentar faţă de cazul I (b_2) şi o combinaţie identificabilă ($b_2c_1a_{12}$), deci nu se câştigă nimic din punctul de vedere al identificabilităţii, cu excepţia cazului în care există informaţii suplimentare despre parametrul b_2. Dacă se ia în considerare cazul particular în care este aplicată aceeaşi intrare în acelaşi moment de timp ambelor reactoare ($u_1 = u_2$), funcţia de transfer $\frac{Y_1(s)}{U_1(s)}$ este egală cu:

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{c_1b_1s + c_1(b_2a_{12} - b_1a_{22})}{\Delta(s)} \tag{26}$$

Ne aflăm în cazul particular în care o anumită combinaţie de intrare poate conduce la pierderea identificabilităţii (doar 4 parametri - în loc de 5 - sunt identificabili). Aceasta ilustrează faptul că o bună alegere a condiţiilor experimentale poate avea o influenţă considerabilă asupra identificabilităţii sistemului.

Cazul IV. $u_1 \neq 0, u_2 = 0$, $a_{12} = 0$ şi doar y_2 este măsurat. Este cazul în care nu există un flux de retur de la reactorul 2 la reactorul 1. Funcţia de transfer $\frac{Y_2(s)}{U_1(s)}$ are forma:

$$\frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{c_2b_1a_{21}}{(s-a_{11})(s-a_{22})} \tag{27}$$

În acest caz parametrii a_{11} şi a_{22} sunt identificabili dar nu se poate face distincţie care sunt valorile lor deoarece, pentru această configuraţie, cei doi parametrii au două valori posibile interschimbabile. Cu alte cuvinte, nu se poate face distincţie între cele două volume V_1 şi V_2, adică nu putem stabili dacă primul volum este mai mic şi al doilea mai mare sau invers.

4. METODE DE TESTARE A IDENTIFICABILITATII STRUCTURALE A SISTEMELOR NELINIARE

Metodele prezentate în continuare sunt cele mai utilizate pentru testarea identificabilităţii structurale pentru sistemele neliniare. Metoda transformatei Laplace, prezentată în paragraful 3, poate fi aplicată doar pentru sisteme liniare, iar rezultatele obţinute prin liniarizarea modelelor neliniare sunt dificil de interpretat. În plus, rezultatele obţinute pentru modelul liniarizat sunt doar condiţii suficiente, adică parametrii identificabili pentru un model liniarizat în jurul unui punct de funcţionare sunt de asemenea identificabili pentru modelul neliniar dar numai în jurul respectivului punct de funcţionare.

4.1 Metoda dezvoltării în serie Taylor

Se consideră un model neliniar scris sub forma următoare:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(x, u, \boldsymbol{\Theta}),\ x(0) = x_0(\boldsymbol{\Theta}) \\ &y(t, \boldsymbol{\Theta}) = h(x, \boldsymbol{\Theta}) \end{aligned} \tag{28}$$

unde *x*, *u*, *y* şi θ reprezintă vectorul de stare, vectorul de intrare, vectorul mărimilor de ieşire ale sistemului şi, respectiv, vectorul parametrilor (necunoscuţi). Metoda se bazează pe dezvoltarea în serie Taylor în jurul punctului *t*=0 al observaţiilor *y(t)*:

$$y(t) = y(0) + t\frac{dy}{dt}(0) + \frac{t^2}{2!}\frac{d^2y}{dt^2}(0) + \ldots \tag{29}$$

şi constă în căutarea informaţiilor despre parametrii necunoscuţi în derivatele ieşirii. Mai precis, *y*(0) şi derivatele succesive ale lui *y* în punctul *t*=0 pot fi exprimate din sistemul de ecuaţii (28) ca funcţii de parametrii necunoscuţi $\boldsymbol{\Theta}^T = [\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2, \ldots \boldsymbol{\Theta}_p]$:

$$y(0) = g_0(\boldsymbol{\theta}) \tag{30}$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = g_1(\boldsymbol{\theta}) \tag{31}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^q y}{dt^q}(0) = g_q(\theta) \tag{32}$$

Pasul următor constă în inversarea expresiilor de mai sus (30)-(32) astfel încât parametrii $\boldsymbol{\Theta}_i, i = \overline{1, p}$ să fie exprimaţi ca funcţii de *y*(0), de derivatele lui *y* în punctul *t*=0 şi de intrarea *u*:

$$\boldsymbol{\Theta}_1 = z_1\left(y(0), \frac{dy}{dt}(0), \ldots, \frac{d^q y}{dt^q}(0), u\right) \tag{33}$$

$$\boldsymbol{\Theta}_2 = z_2\left(y(0), \frac{dy}{dt}(0), \ldots, \frac{d^q y}{dt^q}(0), u\right) \tag{34}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\Theta}_p = z_p\left(y(0), \frac{dy}{dt}(0), \ldots, \frac{d^q y}{dt^q}(0), u\right) \tag{35}$$

Dacă ecuaţiile (33)-(35) există, atunci înseamnă că parametrii $\Theta_i, i=\overline{1,p}$ sunt structural identificabili. De asemenea, este posibil ca ecuaţiile de mai sus să poată fi scrise doar pentru anumite combinaţii ale parametrilor $\Theta_i, i=\overline{1,p}$, şi, prin urmare, aceste combinaţii sunt identificabile. De notat faptul că, în general, numărul derivatelor succesive (=*q*), utilizate pentru analiza identificabilităţii, nu este egal cu numărul *p* de parametrii necunoscuţi. De obicei *q* este cel puţin egal cu *p* (deoarece sunt necesare cel puţin *p* relaţii pentru a obţine cele *p* expresii pentru parametrii $\Theta_i, i=\overline{1,p}$), dar poate fi mai mare decât *p* pentru a obţine noi expresii independente şi prin urmare susceptibile de a introduce noi informaţii pentru analiză. De asemenea, pot fi utilizate mai multe instanţe de timp (şi nu numai *t*=0) lucru util pentru simplificarea analizei prin utilizarea mai multor submodele.

4.2 Metoda seriilor generatoare

Această metodă se bazează pe concepte din teoria controlului neliniar, în principal pe derivatele Lie şi pe legătura acestora cu sistemele neliniare. Se consideră modelul unui sistem exprimat sub forma următoare:

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=f_0(x,\Theta)+\sum_{i=1}^{m}u_i(t)f_i(x,\Theta), x(0)=x_0(\Theta)\\&y(t,\Theta)=h(x,\Theta)\end{aligned} \tag{36}$$

Analiza identificabilităţii se bazează pe funcţia de ieşire $h(x,\Theta)$ şi pe derivatele Lie succesive ale acesteia $L_{f_{j0}}...L_{f_{jk}}h(x,\Theta)$ evaluate la momentul *t*=0. Derivata Lie de-a lungul unui câmp de vectori f_i este definită astfel:

$$L_{f_i}=\sum_{j=1}^{n}f_{j,i}(x,\Theta)\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{37}$$

cu $f_{j,i}$ componenta *j* a lui f_i. Spre exemplu, derivatele Lie ale lui *h* şi L_{fk} de-a lungul câmpului de vectori f_i sunt egale cu:

$$L_{f_i}h(x,\Theta)=\sum_{j=1}^{n}f_{j,i}(x,\Theta)\frac{\partial}{\partial x_j}h(x,\Theta) \tag{38}$$

$$L_{f_i}L_{f_k}=\sum_{j=1}^{n}f_{j,i}(x,\Theta)\frac{\partial}{\partial x_j}L_{f_k} \tag{39}$$

La fel ca în cazul metodei dezvoltării în serie Taylor, se caută în derivatele Lie succesive în punctul *t*=0 informaţii despre parametrii ce trebuie identificaţi.

4.3 Transformarea modelelor neliniare

O altă modalitate pentru studierea identificabilităţii structurale constă în transformarea modelului neliniar într-un model liniar în raport cu parametrii, şi analizarea identificabilităţii pe modelul liniar. O mai bună înţelegere a acestor metode poate fi realizată din exemplul următor.

EXEMPLU:

Se consideră un model neliniar în care apar trei parametrii ($\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$):

$$\frac{dx_1}{dt} = -\theta_1 x_1 - \theta_2 x_1 + \theta_3 x_1 x_2 + u, x_1(0) = 1 \tag{40}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\theta_2 x_1 - \theta_3 x_1 x_2, x_2(0) = 0 \tag{41}$$

$$y(t, \theta) = x_1 \tag{42}$$

Acest model poate fi modelul unui bioproces într-un reactor de tip batch unde x_2 este concentraţia unui reactant şi x_1 concentaţia catalizatorului (spre exemplu a microorganismelor). În acest reactor au loc trei reacţii: autocataliza lui x_1 cu cinetică de ordinul unu în raport cu reactantul ($r_1 = \theta_3 x_1 x_2$), o descompunere a lui x_1 în x_2 ($r_2 = \theta_2 x_1$) şi reacţia de autoliză a lui x_1 ($r_3 = \theta_1 x_1$). În afara lui y se consideră cunoscută şi intrarea u, care reprezintă adaosul de autocatalizator x_1. Acest model este un model liniar în raport cu parametrii dar neliniar în raport cu stările sistemului.

a. Metoda dezvoltării în serie Taylor

Se dezvoltă în serie Taylor $y(t, \theta)$:

$$\frac{dy}{dt}(0) = -(\theta_1 + \theta_2) + u \tag{43}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = (\theta_1 + \theta_2)^2 + (\theta_1 + \theta_2)u + \theta_2\theta_3 \tag{44}$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = -(\theta_1 + \theta_2)^3 + (\theta_1 + \theta_2)^2 u + 2\theta_2\theta_3 u - 2\theta_2\theta_3(\theta_1 + \theta_2) - \theta_2\theta_3^2 \tag{45}$$

Se notează cu $z_i = \frac{d^i y}{dt^i}(0)$.

În principiu, z_i pot fi considerate variabilele cu valori cunoscute deoarece ele pot fi uşor obţinute din măsurarea lui y. Ecuaţiile (43)-(45) pot fi scrise sub forma:

$$z_1 = -(\theta_1 + \theta_2) + u \tag{46}$$

$$z_2 = (\theta_1 + \theta_2)^2 + (\theta_1 + \theta_2)u + \theta_2\theta_3 \tag{47}$$

$$z_3 = -(\theta_1 + \theta_2)^3 + (\theta_1 + \theta_2)^2 u + 2\theta_2\theta_3 u - 2\theta_2\theta_3(\theta_1 + \theta_2) - \theta_2\theta_3^2 \tag{48}$$

Se obţine astfel un sistem de trei ecuaţii neliniare cu trei necunoscute $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Problema dificilă este inversarea relaţiilor (46)-(48), astfel încât parametrii $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ să fie exprimaţi în funcţie numai de z_i şi u. Din analiza relaţiilor (46)-(48) se poate observa că există trei combinaţii ale parametrilor $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ şi anume $\theta_1 + \theta_2, \theta_2\theta_3, \theta_2\theta_3^2$. Pentru aceste combinaţii se obţin următoarele relaţii:

$$\theta_1 + \theta_2 = u - z_1 \tag{49}$$

$$\theta_2\theta_3 = z_2 - (u - z_1)^2 + (u - z_1)u \tag{50}$$

$$\theta_2\theta_3^2 = z_3 + (u - z_1)^3 + (u - z_1)^2 u - 2(u - (u - z_1))(z_2 - (u - z_1)^2 + (u - z_1)u) \tag{51}$$

Parametrul θ_3 se obţine ca raportul dintre $\theta_2\theta_3^2$ şi $\theta_2\theta_3$ după care se obţin succesiv θ_2 şi θ_1:

$$\theta_1 = u - z_1 - (z_2 - 2u^2 + z_1^2 + 3uz_1)^2(2u^3 - 10u^2 z_1 + 6uz_1^2 + z_1^3 + 2z_1 z_2 - z_3) \tag{52}$$

$$\theta_2 = (z_2 - 2u^2 + z_1^2 + 3uz_1)^2(2u^3 - 10u^2 z_1 + 6uz_1^2 + z_1^3 + 2z_1 z_2 - z_3) \tag{53}$$

$$\theta_3 = \frac{2u^3 - 10u^2 z_1 + 6uz_1^2 + z_1^3 + 2z_1 z_2 - z_3}{z_2 - 2u^2 + z_1^2 + 3uz_1} \tag{54}$$

Din relaţiile (52)-(54) se deduce că parametrii $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ pot fi calculaţi formal din valorile lui z_1, z_2, z_3 şi u, adică sunt structural identificabili.

b. Metoda seriilor generatoare

Se notează:

$$f_0 = \begin{pmatrix} -\theta_1 x_1 - \theta_2 x_1 + \theta_3 x_1 x_2 \\ \theta_2 x_1 - \theta_3 x_1 x_2 \end{pmatrix} \; f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; h = x_1 \tag{55}$$

Derivatele Lie sunt următoarele:

$$L_{f_0} = [-\theta_1 x_1 - \theta_2 x_1 + \theta_3 x_1 x_2]\frac{\partial}{\partial x_1} + [\theta_2 x_1 - \theta_3 x_1 x_2]\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{56}$$

$$L_{f_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{57}$$

Se calculează succesiv derivatele Lie ale lui h în punctul t=0:

$$z_1 = L_{f0} h(0) = -\theta_1 - \theta_2 \tag{58}$$

$$z_2 = L_{f0} L_{f0} h(0) = (\theta_1 + \theta_2)^2 + \theta_2\theta_3 \tag{59}$$

$$z_3 = L_{f0} L_{f0} h(0) = -(\theta_1 + \theta_2)^3 + (\theta_1 + \theta_2)^2 \theta_2\theta_3 - 2\theta_2\theta_3(\theta_1 + \theta_2) - \theta_2\theta_3^2 \tag{60}$$

Procedând în mod similar ca în cazul metodei dezvoltării în serie Taylor, cei trei parametrii necunoscuţi $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ pot fi scrişi în funcţie de z_1, z_2, z_3 şi, deci, sunt structural identificabili. De remarcat faptul că în acest caz, spre deosebire de metoda precedentă, cei trei parametri sunt exprimaţi doar în funcţie de z_1, z_2, z_3 şi expresia lor nu mai depinde de intrarea u. Această abordare permite o separare a termenilor ce depind de stare de termenii ce depind de intrare, ceea ce conduce la obţinerea unor expresii ale parametrilor mai simple, lucru avantajos din punctul de vedere al calculelor.

c. Metoda transformării modelului neliniar

Scopul acestei metode este de a rescrie modelul intrare-ieşire sub forma unui model liniar în raport cu parametrii necunoscuţi ai sistemului. În acest caz, acest lucru poate fi realizat prin eliminarea lui x_2 prin diferenţierea de două ori a lui x_1. Variabila de stare x_2 poate fi obţinută din relaţia (40)

$$x_2 = \frac{1}{\theta_3 x_1}\left(\frac{dx_1}{dt} + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_1 - u\right) \tag{61}$$

Prin diferenţierea de două ori a lui $y=x_1$ în raport cu t obţinem:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{u}{y} = (\theta_1 + \theta_2)\frac{dy}{dt}\left(\frac{dy}{dt} - 1\right) + \theta_2\theta_3 y^2 - 2\theta_3 y\left(\frac{dy}{dt} - u\right) - \theta_3(\theta_1 + \theta_2)y\frac{dy}{dt} \tag{62}$$

Această relaţie poate fi pusă sub forma regresivă $Y = \theta^T \Phi$, unde:

$$Y = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{u}{y} \tag{63}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 + \theta_2 \\ \theta_2\theta_3 \\ \theta_3 \\ \theta_3(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \tag{64}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{dy}{dt}\left(\frac{dy}{dt} - 1\right) \\ y^2 \\ y\left(\frac{dy}{dt} - u\right) \\ y\frac{dy}{dt} \end{pmatrix} \tag{65}$$

Vectorul θ este structural identificabil dacă elementele vectorului Φ sunt liniar-independente.

5. ANALIZA IDENTIFICABILITATII STRUCTURALE FOLOSIND DISTRIBUTIILE

5.1. Consideraţii teoretice privind distribuţiile

Din punct de vedere practic, utilizarea derivatelor unor semnale pentru identificare prezintă o serie de dificultăţi datorate, în special, zgomotelor care afectează măsurătorile. Prin acordarea unei importanţe mai mari unei singure valori a semnalului într-un anumit punct se amplifică şi influenţa zgomotului ce însoţeşte acel semnal. Din acest motiv, metodele integrale de identificare sunt mult mai robuste şi mai uşor de implementat. În continuare se prezentă o procedură de analiză a identificabilităţii structurale bazate pe teoria distribuţiilor.

O distribuţie *F* este un procedeu prin care oricărei funcţii φ ce aparţine unei mulţimi de definiţie îi corespunde un număr real sau complex. Acest număr este notat $F(\varphi)$ sau (F, φ). Funcţiile φ asupra cărora acţionează distribuţiile *F* îndeplinesc o serie de condiţii severe:

- funcţiile φ sunt nule în afara unei mulţimi Ω;
- funcţiile φ sunt infinit derivabile;

- mulţimea Φ_n a funcţiilor φ, este înzestrată cu o normă ce permite măsurarea distanţei dintre două funcţii.

Un set important de distribuţii este cel al aşa numitelor distribuţii regulate, definite în mod unic prin funcţii local integrabile. Fie $q : R \to R, t \to q(t)$ o funcţie ce admite o integrală Riemann pe orice interval compact din R. Cu această funcţie poate fi construită o funcţională unică,

$$F_q : \Phi_n \to R, \varphi \to F_q(\varphi) \in R \tag{66}$$

folosind următoarea relaţie:

$$F_q(\varphi) = \int_R q(t)\varphi(t)dt, \forall \varphi \in \Phi_n \tag{67}$$

Se consideră $q \in C^0(R)$, caz în care are loc următoarea echivalenţă

$$F_q(\varphi) = 0, \forall \varphi \in \Phi_n \iff q(t) = 0, \ \forall t \in R \tag{68}$$

Se notează cu Φ_n' spaţiul dual lui Φ_n, adică mulţimea tuturor distribuţiilor definite pe Φ_n. Acesta este de asemenea un spaţiu liniar. Dacă *q* este o combinaţie liniară de funcţii continue în timp q_i, i=1:p atunci distribuţia F_q pe Φ_n este o combinaţie liniară pe acelaşi spaţiu al distribuţiilor Φ_n', determinată de componentele F_{qi},

$$q = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i q_i \ \Rightarrow F_q = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i F_{qi} \tag{69}$$

$$F_{qi}(\varphi) = \int_R q_i(t)\varphi(t)dt, \forall \varphi \in \Phi_n \tag{70}$$

În teoria distribuţiilor este introdusă, ca o convenţie, noţiune de distribuţie derivabilă de ordinul k, k=0:n. Dacă $F_q \in \Phi_n'$, atunci derivata ei de ordinul *k* este o nouă distribuţie, $F_q^{(k)} \in \Phi_n'$, definită în mod unic de relaţia

$$F_q^{(k)}(\varphi) = (-1)^k F_q(\varphi^{(k)}), \ \forall \varphi \in \Phi_n$$

$$\varphi \to F_q^{(k)}(\varphi) = (-1)^k \int_R q(t)\varphi^{(k)}(t)dt \in R \tag{71}$$

unde

$$\varphi^{(k)} : R \to R, \ t \to \varphi^{(k)}(t) = \frac{d^k \varphi(t)}{dt^k}$$

este derivata de ordinul k a funcţiei fundamentale $\varphi \in \Phi_n$.

Când $q \in C^k(R)$, se poate demonstra că:

$$F_q^{(k)}(\varphi) = F_{q^{(k)}}(\varphi), \ \varphi \to F_q^{(k)}(\varphi) = F_{q^{(k)}}(\varphi) = \int_R q^{(k)}(t)\varphi(t)dt \in R \tag{72}$$

derivata de ordinul *k* a unei distribuţii generate de o funcţie $q \in C^k(R)$ este egală cu distribuţia generată de derivata de ordinul *k* a funcţiei *q*:

$$q^{(k)} : R \to R, \ t \to q^{(k)}(t) = \frac{d^k q(t)}{dt^k}.$$

Din (71) şi (72) se poate scrie că:

$$F_q^{(k)}(\varphi) = \int_R q^{(k)}(t)\varphi(t)dt = (-1)^k \int_R q(t)\varphi^{(k)}(t)dt, \quad q \in C^k(R) \tag{73}$$

Utilizând proprietăţile distribuţiilor prezentate mai sus poate fi dezvoltat un algoritm de analiză a identificabilităţii structurale a unor procese biotehnologice prin obţinerea unor sisteme liniare în raport cu parametrii necunoscuţi ai sistemului. Se va exemplifica această metodă pe un proces biotehnologic de depoluare a apelor reziduale.

5.2. Modelarea procesului de biodegradare a apelor reziduale (Studiu de caz)

Instalaţiile pentru tratarea apelor reziduale sunt dificil de controlat din cauza dinamicilor neliniare şi a parametrilor necunoscuţi ale căror valori se pot modifica în timp. Vom considera un proces de biodegradare a apelor reziduale cu producerea de gaz metan, proces ce are loc în interiorul unui bioreactor continuu (cu funcţionare în flux) al cărui model redus este prezentat în (Selişteanu et. al., 2004). Procesul are două faze. În prima fază, glucoza din apa reziduală este descompusă acizi graşi volatili (acetaţi, acid propionic), hidrogen şi carbon anorganic acţiunea bacteriilor acidogenice. In faza a doua, hidrogenul ionizat descompune acidul propionic în acetaţi, hidrogen şi dioxid de carbon. Într-o primă fază metanogenică, acetatul este transformat în metan şi dioxid de carbon şi, în final, gazul metan este obţinut din hidrogen şi dioxid de carbon, (Bastin şi Dochain, 1990), (Petre, 2002). Se consideră următoarea schemă de reacţie simplificată:

$$\begin{cases} S_1 \xrightarrow{\Phi 1} X_1 + S_2 \\ S_2 \xrightarrow{\Phi 2} X_2 + P_1 \end{cases} \tag{74}$$

unde:

- S_1 – substratul de glucoză
- S_2 – substratul de acetat
- X_1 – bacteria acidogenică
- X_2 – bacteria metanogenică
- P_1 – produsul final (gazul metan)
- Φ_1, Φ_2 - vitezele de reacţie

Modelul dinamic corespunzător este următorul:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X_1 \\ S_1 \\ X_2 \\ S_2 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k_2 & -k_3 \\ 0 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} - D \begin{bmatrix} X_1 \\ S_1 \\ X_2 \\ S_2 \\ P_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ DS_{in} \\ 0 \\ 0 \\ -Q_1 \end{bmatrix} \tag{75}$$

unde vectorul de stare al modelului este:

$$\xi = \begin{bmatrix} X_1 \\ S_1 \\ X_2 \\ S_2 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{bmatrix} \tag{76}$$

ale cărui componente sunt concentraţii în (g/l).

Vitezele de reacţie sunt funcţii neliniare de componentele de stare, exprimate astfel:

$$\Phi = \Phi(\xi) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\xi) \\ \Phi_2(\xi) \end{bmatrix} \tag{77}$$

Vectorul debitelor de alimentare şi de evacuare este notat cu:

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ DS_{in} \\ 0 \\ 0 \\ -Q_1 \end{bmatrix} \tag{78}$$

unde:

D – viteza de diluţie;

S_{in} – concentraţia substratului de glucoză influent;

Q_1 – debitul de evacuare al gazului metan.

Modelul dinamic al unui bioproces poate fi scris sub formă compactă, astfel:

$$\frac{d\xi}{dt} = K \cdot \Phi(\xi) - D \cdot \xi + F \tag{79}$$

unde

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k_2 & -k_3 \\ 0 & k_4 \end{bmatrix} \tag{80}$$

reprezintă matricea coeficienţilor de producţie.

De fapt, acest model descrie comportarea unei întregi clase de procese biotehnologice. El reprezintă dinamica generală a modelului de stare pentru această clasă de bioprocese (Bastin şi Dochain, 1990). Există numeroase forme de exprimare a vitezelor de reacţie ale unui bioproces dintre care se menţionează legea Monod:

$$\Phi_1(\xi) = \mu_1 \frac{S_1 \cdot X_1}{K_{M_1} + S_1} \tag{81}$$

şi modelul cinetic Haldane:

$$\Phi_2(\xi) = \mu_2 \frac{S_2 \cdot X_2}{K_{M_2} + S_2 + S_2^2 / K_i} \tag{82}$$

unde:

K_{M_1}, K_{M_2} - constantele Michaelis-Menten;

μ_1, μ_2 - vitezele specifice de creştere;

K_i – constanta de inhibare.

Pentru simplificarea notaţiilor, se grupează parametrii procesului într-un vector:

$$\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6 \quad \theta_7 \quad \theta_8 \quad \theta_9]^T \tag{83}$$

unde:

$$\theta_1 = k_1; \quad \theta_2 = k_2; \quad \theta_3 = k_3; \quad \theta_4 = k_4; \tag{84}$$

$$\theta_5 = \mu_1; \theta_6 = \mu_2; \tag{85}$$

$$\theta_7 = K_{M_1}; \theta_8 = K_{M_2}; \theta_9 = K_i; \tag{86}$$

Deoarece viteza de diluţie *D* poate fi modificată din exterior, se consideră un vector de intrare format din trei componente

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T \tag{87}$$

Celelalte două componente ale lui *u* sunt concentraţia S_{in} şi debitul de evacuare al gazului metan Q_1, astfel încât:

$$u_1 = S_{in}; u_2 = Q_1; u_3 = D \tag{88}$$

De obicei Q_1 depinde de variabilele de stare, $Q_1 = \psi(\xi)$, determinând o reacţie inversă la intrarea u_2. Folosind notaţiile anterioare, sistemul de ecuaţii de stare (75) poate fi scris sub următoarea formă explicită:

$$\dot{\xi}_1 = \Phi_1 - u_3 \cdot \xi_1 \tag{89}$$

$$\Phi_1 = \theta_5 \cdot \frac{\xi_1 \cdot \xi_2}{\theta_7 + \xi_2} \tag{90}$$

$$\dot{\xi}_2 = -\theta_1 \cdot \Phi_1 - u_3 \cdot \xi_2 + u_1 \cdot u_3 \tag{91}$$

$$\dot{\xi}_3 = \Phi_2 - u_3 \cdot \xi_3 \tag{92}$$

$$\Phi_2 = \theta_6 \cdot \frac{\xi_3 \cdot \xi_4}{\theta_8 + \xi_4 + \theta_9^{'} \cdot \xi_4^2}, \theta_9^{'} = \frac{1}{\theta_9} \tag{93}$$

$$\dot{\xi}_4 = \theta_2 \cdot \Phi_1 - \theta_3 \cdot \Phi_2 - u_3 \cdot \xi_4 \tag{94}$$

$$\dot{\xi}_5 = -u_3 \cdot \xi_5 + \theta_4 \cdot \Phi_2 - u_2 \tag{95}$$

5.3. Analiza identificabilităţii structurale a procesului de biodegradare a apelor reziduale

Se presupune că toate variabilele de stare ξ sunt măsurabile. Sistemul dinamic (89-95) conţine dependenţe raţionale între parametrii şi variabilele măsurate. Pentru a obţine ecuaţii liniare în raport cu parametri necunoscuţi, problema identificabilităţii este împărţită în mai multe subprobleme mai simple interconectate, numite nivele.

Pe baza structurii specifice a acestui sistem, este posibilă gruparea ecuaţiilor de stare în cinci probleme interconectate. Ele sunt organizate într-o structură ierarhică. Mai întâi, în *Nivelul 1*, anumite ecuaţii de stare sunt utilizate pentru a obţine un set de ecuaţii liniare în raport cu anumiţi parametri. Rezultatele obţinute în acest prim stadiu sunt utilizate pentru a exprima alţi parametri prin ecuaţii liniare în *Nivelul 2*. Acest proces se repetă în celelalte nivele până când sunt analizaţi toţi parametrii necunoscuţi. În continuare este prezentată în detaliu procedura de analiză a identificabilităţii structurale pe baza distribuţiilor pentru procesul de biodegradare a apelor reziduale prezentat mai sus.

Nivelul 1. *Analiza identificabilităţii lui* θ_1

Substituind expresia lui Φ_1 din (89) în (91) se obţine:

$$\left(-\dot{\xi}_2 - u_3\xi_2 + u_1 \cdot u_3\right) = \left(\dot{\xi}_1 + u_3\xi_1\right) \cdot \theta_1 \tag{96}$$

relaţie liniară în raport cu parametrul θ_1. Înmulţind relaţia (96) cu funcţiile de test $\varphi_i(t) \in \Phi_n$ şi integrand pe *R* se obţine un sistem de ecuaţii liniare în raport cu parametrul θ_1:

$$F_v(\varphi) = \theta_1 F_{w_1}(\varphi) \tag{97}$$

unde

$$F_{w_1}(\varphi) = \int_R [\xi_1(t)] \cdot \varphi^{(1)}(t)dt + \int_R [u_3(t) \cdot \xi_1(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{98}$$

$$F_v = \int_R [\xi_2(t)]\varphi^{(1)}(t)dt + \int_R [-u_3(t) \cdot \xi_2(t)]\varphi^{(0)}(t)dt + \int_R [u_1(t) \cdot u_3(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{99}$$

Dacă matricea F_{w1} este nesingulară, atunci parametrul θ_1 este identificabil.

Nivelul 2. *Analiza identificabilităţii parametrilor* θ_5 *şi* θ_7

Considerând cunoscut parametrul $\theta_1 = \hat{\theta}_1$ de la *Nivelul 1* şi substituind relaţia (90), ecuaţia (91) devine,

$$\dot{\xi}_2 = -\hat{\theta}_1 \cdot \theta_5 \cdot \frac{\xi_1 \cdot \xi_2}{\theta_7 + \xi_2} - u_3 \cdot \xi_2 + u_1 \cdot u_3 \tag{100}$$

sau

$$(-\dot{\xi}_2 \cdot \xi_2 - u_3 \cdot \xi_2^2 + u_1 \cdot u_3 \cdot \xi_2) = (\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \hat{\theta}_1) \cdot \theta_5 + (\dot{\xi}_2 + u_3 \cdot \xi_2 - u_1 \cdot u_3) \cdot \theta_7 \tag{101}$$

relaţie liniară în raport cu parametrii θ_5 şi θ_7. Amplificând în ambele părţi ale relaţiei (101) cu funcţiile de test $\varphi_i(t) \in \Phi_n$ şi integrand pe *R* se obţine un sistem de ecuaţii liniare în raport cu parametrii θ_5 şi θ_7 :

$$F_v(\varphi) = \theta_5 F_{w_1}(\varphi) + \theta_7 F_{w_2}(\varphi) \tag{102}$$

unde

$$F_{w1}(\varphi) = \int_R [\xi_1(t) \cdot \xi_2(t) \cdot \hat{\theta}_1]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{103}$$

$$F_{w_2}(\varphi) = \int_R [-\xi_2(t)]\varphi^{(1)}(t)dt + \int_R [u_3(t)\cdot\xi_2(t)]\varphi^{(0)}(t)dt - \int_R [u_1(t)\cdot u_3(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{104}$$

$$F_v(\varphi) = \int_R [-\frac{1}{2}\xi_2^2(t)]\varphi^{(1)}(t)dt + \int_R [-u_3(t)\cdot\xi_2^2(t)]\varphi^{(0)}(t)dt + \int_R [u_1(t)\cdot u_3(t)\cdot\xi_2]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{105}$$

În consecinţă, parametrii θ_5 şi θ_7 sunt identificabili.

Nivelul 3. *Analiza identificabilităţii parametrilor θ_2 şi θ_3*

Considerând cunoscuţi parametrii $\theta_5 = \hat{\theta}_5$ şi $\theta_7 = \hat{\theta}_7$ de la *Nivelul 2,* expresia estimată $\hat{\Phi}_1$ a lui Φ_1 este

$$\hat{\Phi}_1(t) = \hat{\theta}_5 \cdot \frac{\xi_1(t)\cdot\xi_2(t)}{\hat{\theta}_7 + \xi_2(t)} \tag{106}$$

Substituind expresia lui Φ_2 din (92) şi (106) în locul lui Φ_1 în relaţia (94) se obţine,

$$\dot{\xi}_4 + u_3\cdot\xi_4 = \theta_2\cdot\hat{\Phi}_1 - \theta_3\cdot[\dot{\xi}_3 + u_3\cdot\xi_3] \tag{107}$$

relaţie liniară în raport cu parametrii θ_2 şi θ_3. Amplificând în ambele părţi ale relaţiei (107) cu funcţiile de test $\varphi_i(t)\in\Phi_n$ şi integrand pe *R* se obţine un sistem de ecuaţii liniare în raport cu parametrii θ_2 şi θ_3:

$$F_v(\varphi) = \theta_2 F_{w_1}(\varphi) + \theta_3 F_{w_2}(\varphi) \tag{108}$$

unde

$$F_{w_1}(\varphi) = \int_R [\hat{\Phi}_1(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{109}$$

$$F_{w_2}(\varphi) = \int_R [-\xi_3(t)]\varphi^{(1)}(t)dt + \int_R [-u_3(t)\cdot\xi_3(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{110}$$

$$F_v(\varphi) = \int_R [-\xi_4(t)]\varphi^{(1)}(t)dt + \int_R [u_3(t)\cdot\xi_4(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{111}$$

În consecinţă, parametrii θ_2 şi θ_3 sunt identificabili.

Nivelul 4. *Analiza identificabilităţii parametrilor θ_6 , θ_8 şi θ_9*

Considerând cunoscuţi parametrii $\theta_2 = \hat{\theta}_2$ şi $\theta_3 = \hat{\theta}_3$ de la *Nivelul 3*, şi substituind relaţia (93) în (94) unde Φ_1 este înlocuit cu $\hat{\Phi}_1$ se obţine,

$$\dot{\xi}_4 = \theta_2\cdot\hat{\Phi}_1 - \hat{\theta}_3\cdot\theta_6\cdot\frac{\xi_3\cdot\xi_4}{\theta_8 + \xi_4 + \theta_9^{'}\cdot\xi_4^2} - u_3\cdot\xi_4 \tag{112}$$

sau

$$(\xi_4 \cdot \dot{\xi}_4 + u_3 \cdot \xi_4^2 - \hat{\theta}_2 \cdot \hat{\Phi}_1 \cdot \xi_4) = (\xi_3 \cdot \xi_4 \cdot \hat{\theta}_3) \cdot \theta_6 + (\dot{\xi}_4 + u_3 \cdot \xi_4 - \hat{\theta}_2 \cdot \hat{\Phi}_1) \cdot \theta_8 + (\xi_4^2 \cdot \dot{\xi}_4 + u_3 \cdot \xi_4^3 - \hat{\theta}_2 \cdot \hat{\Phi}_1 \cdot \xi_4^2) \cdot \theta_9' \tag{113}$$

relaţie liniară în raport cu parametrii θ_6 , θ_8 şi θ_9'.

Amplificând în ambele părţi ale relaţiei (113) cu funcţiile de test $\varphi_i(t) \in \Phi_n$ şi integrand pe *R* se obţine un sistem de ecuaţii liniare în raport cu parametrii θ_6 , θ_8 şi θ_9':

$$F_v(\varphi) = \theta_6 F_{w_1}(\varphi) + \theta_8 F_{w_2}(\varphi) + \theta_9' F_{w_2}(\varphi) \tag{114}$$

unde

$$F_{w_1}(\varphi) = \int_R [\xi_3(t) \cdot \xi_4(t) \cdot \hat{\theta}_3(t)] \varphi^{(0)}(t) dt \tag{115}$$

$$F_{w_2}(\varphi) = \int_R [\xi_4(t)] \varphi^{(1)}(t) dt + \int_R [u_3(t) \cdot \xi_4(t)] \varphi^{(0)}(t) dt + \int_R [-\hat{\theta}_2(t) \cdot \hat{\Phi}_1(t)] \varphi^{(0)}(t) dt \tag{116}$$

$$F_{w_3}(\varphi) = \int_R [\frac{1}{3} \xi_4^3(t)] \varphi^{(1)}(t) dt + \int_R [u_3(t) \cdot \xi_4^3(t)] \varphi^{(0)}(t) dt + \int_R [-\hat{\theta}_2(t) \cdot \hat{\Phi}_1(t) \cdot \xi_4^2(t)] \varphi^{(0)}(t) dt \tag{117}$$

$$F_v(\varphi) = \int_R [-\frac{1}{2} \xi_4^2(t)] \varphi^{(1)}(t) dt + \int_R [-u_3(t) \cdot \xi_4^2(t)] \varphi^{(0)}(t) dt + \int_R [\hat{\theta}_2(t) \cdot \hat{\Phi}_1(t) \cdot \xi_4(t)] \varphi^{(0)}(t) dt \tag{118}$$

În consecinţă, parametrii θ_6 , θ_8 şi θ_9' sunt identificabili.

Nivelul 5. *Analiza identificabilităţii lui* θ_4

Considerând cunoscuţi parametrii $\theta_6 = \hat{\theta}_6$, $\theta_8 = \hat{\theta}_8$ şi $\theta_9' = \hat{\theta}_9'$ de la *Nivelul 4,* expresia estimată $\hat{\Phi}_2$ a lui Φ_2 este

$$\hat{\Phi}_2 = \hat{\theta}_6 \cdot \frac{\xi_3 \cdot \xi_4}{\theta_8 + \xi_4 + \hat{\theta}_9' \cdot \xi_4^2} \tag{119}$$

Înlocuind expresia lui Φ_2 cu (119) în relaţia (95), se obţine

$$\dot{\xi}_5 = -u_3 \cdot \xi_5 + \theta_4 \cdot \hat{\Phi}_2 - u_2 \tag{120}$$

sau

$$(\dot{\xi}_5 + u_3 \cdot \xi_5 + u_2) = (\hat{\Phi}_2) \cdot \theta_4 \tag{121}$$

relaţie liniară în raport cu parametrul θ_4 . Amplificând în ambele părţi ale relaţiei (121) cu funcţiile de test $\varphi_i(t) \in \Phi_n$ şi integrand pe *R* se obţine un sistem de ecuaţii liniare în raport cu parametrul θ_4 :

$$F_v(\varphi) = \theta_4 F_{w_1}(\varphi) \tag{122}$$

unde

$$F_{w_1}(\varphi) = \int_R [\hat{\Phi}_2(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \qquad (123)$$

$$F_v(\varphi) = \int_R [\xi_5(t)]\varphi^{(1)}(t)dt + \int_R [u_3(t)\cdot\xi_5(t)]\varphi^{(0)}(t)dt + \int_R [u_2(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \qquad (124)$$

Deci, parametrul Θ_4 este identificabil.

5.4 Analiza identificabilităţii structurale a instalaţiei de reducere a materiei organice din apa uzată prin tratare cu nămol activ folosind distribuţiile (Studiu de caz)

Modelul matematic considerat a fost propus în (Nejjari *et al.*, 1991). El are la bază următoarele ipoteze suplimentare:

- sistemul se consideră a fi în regim staţionar: $F_{in} = F_{out} = F$;
- fluxul de recirculare a nămolului activ în bioreactor se consideră a fi proporţional cu fluxul din proces (*F*): $F_r = r\ F$, unde: *r* – rata de nămol recirculat;
- fluxul de eliminare nămol excedentar din bioreactor se consideră a fi proporţional cu fluxul din proces (*F*): $F_\beta = \beta\ F$, unde β – rata de nămol excedentar (eliminat);
- se consideră că nu există substrat sau oxigen dizolvat în fluxul de recirculare a nămolului activ în bioreactor;
- fluxul la ieşirea bioreactorului aerat se consideră a fi egal cu suma dintre fluxul de ieşire din bioreactor şi fluxul de recirculare a nămolului activ în bioreactor.

Aceste ipoteze sunt exemplificate în figura 3. Ţinând cont că volumul *V* este constant, în prezentarea modelului s-a preferat mărimii flux utilizarea vitezei de diluţie *D* ($D = \frac{F}{V}$).

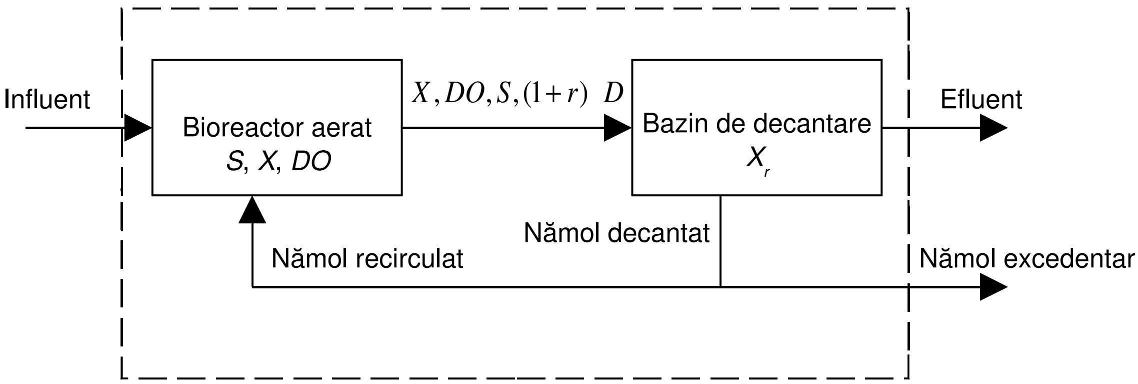


Figura 3. Reprezentare schematică a instalaţiei de reducere a materiei organice din apa uzată prin tratare cu nămol activ

Mărimile de intrare ale sistemului sunt viteza de aerare *W* [m³/h⁻¹], viteza de diluţie *D* [h⁻¹] şi rata de nămol recirculat *r*. În aceste condiţii, modelul procesului considerat este dat de următoarele ecuaţii:

$$\frac{dX}{dt} = \mu(t)\,X(t) - D(t)(1+r)\,X(t) + rD(t)\,X_r(t) \qquad (125)$$

$$\frac{dS}{dt}=-\frac{\mu(t)}{Y}X(t)-D(t)(1+r)S(t)+D(t)S_{in} \tag{126}$$

$$\frac{dDO}{dt}=-\frac{K_0\mu(t)X(t)}{Y}-D(t)(1+r)DO(t)+\alpha W\left(DO_{\max}-DO(t)\right)+D(t)DO_{in} \tag{127}$$

$$\frac{dX_r}{dt}=D(t)(1+r)X(t)-D(t)(\beta+r)X_r(t) \tag{128}$$

$$\mu(t)=\mu_{\max}\frac{S(t)}{K_s+S(t)}\frac{DO(t)}{K_{DO}+DO(t)} \tag{129}$$

Pentru simplificarea notaţiilor, se notează vectorul variabilelor de stare astfel:

$$\xi=\begin{bmatrix}X\\S\\DO\\X_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{bmatrix} \tag{130}$$

Se grupeaza parametrii procesului într-un vector:

$$\theta=[\theta_1\quad\theta_2\quad\theta_3\quad\theta_4\quad\theta_5\quad\theta_6\quad\theta_7\quad\theta_8\quad]^T \tag{131}$$

unde:

$$\theta_1=Y;\ \theta_1'=\frac{1}{\theta_1}\quad\theta_2=K_0;\quad\theta_3=\alpha;\quad\theta_4=\beta;$$

$$\theta_5=DO_{\max}\ ;\ \theta_6=K_S; \tag{132}$$

$$\theta_7=K_{DO};\ \theta_8=\mu_{\max};$$

Relaţiile (125)-(129) devin

$$\frac{d\xi_1}{dt}=\mu\xi_1-u_2(1+u_3)\xi_1+u_3u_2\xi_4 \tag{133}$$

$$\frac{d\xi_2}{dt}=-\frac{\mu}{\theta_1}\xi_1-u_2(1+u_3)\xi_2+u_2S_{in} \tag{134}$$

$$\frac{d\xi_3}{dt}=-\theta_2\frac{\mu}{\theta_1}\xi_1-u_2(1+u_3)\xi_3+u_1\theta_3(\theta_5-\xi_3)+u_2DO_{in} \tag{135}$$

$$\frac{d\xi_4}{dt}=u_2(1+u_3)\xi_1-u_2(\theta_4+u_3)\xi_4 \tag{136}$$

$$\mu=\theta_8\frac{\xi_2}{\theta_6+\xi_2}\frac{\xi_3}{\theta_7+\xi_3} \tag{137}$$

Nivelul 1 *Analiza identificabilităţii parametrului* θ_4

Din relaţia (136) se obţine

$$(u_2\xi_4)\theta_4 = -\dot{\xi}_4 + u_2(1+u_3)\xi_1 - u_2u_3\xi_4 \qquad (138)$$

relaţie liniară în raport cu parametrul θ_4. Înmulţind relaţia (138) cu funcţiile de test $\varphi_i(t) \in \Phi_n$ şi integrand pe *R* se obţine un sistem de ecuaţii liniare în raport cu parametrul θ_4:

$$F_v(\varphi) = \theta_4 F_{w_1}(\varphi) \qquad (139)$$

unde

$$F_{w_1}(\varphi) = \int_R [u_2(t)\cdot\xi_4(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \qquad (140)$$

$$\begin{aligned} F_v = & \int_R [-\xi_4(t)]\varphi^{(1)}(t)dt + \int_R [u_2(t)(1+u_3(t))\cdot\xi_1(t)]\varphi^{(0)}(t)dt + \\ & \int_R [-u_2(t)\cdot u_3(t)\xi_4(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \end{aligned} \qquad (141)$$

Dacă matricea F_{w1} este nesingulară, atunci parametrul θ_4 este identificabil.

Nivelul 2 *Analiza identificabilităţii parametrului* θ_1

Din relaţia (133), notând $\mu(t)\xi_1(t) = \Phi_1(t)$, se obţine

$$\Phi_1 = \dot{\xi}_1 + u_2(1+u_3)\xi_1 - u_3u_2\xi_4 \qquad (142)$$

Presupunând că se poate măsura derivata lui ξ_1, înlocuind relaţia (142) în (134) şi ţinând cont că $\theta_1' = \dfrac{1}{\theta_1}$, rezultă:

$$\Phi_1\theta_1' = -\dot{\xi}_2 - u_2(1+u_3)\xi_2 + u_2S_{in} \qquad (143)$$

relaţie liniară în raport cu parametrul θ_1'. Înmulţind relaţia (143) cu funcţiile de test $\varphi_i(t) \in \Phi_n$ şi integrând pe *R* obţinem un sistem de ecuaţii liniare în raport cu parametrul θ_1':

$$F_v(\varphi) = \theta_1' F_{w_1}(\varphi) \qquad (144)$$

unde

$$F_{w_1}(\varphi) = \int_R [\Phi_1(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \qquad (145)$$

$$\begin{aligned} F_v = & \int_R -\xi_2(t)\varphi^{(1)}(t)dt + \int_R [-u_2(t)(1+u_3(t))\cdot\xi_1(t)]\varphi^{(0)}(t)dt + \\ & \int_R [u_2(t)\cdot S_{in}]\varphi^{(0)}(t)dt \end{aligned} \qquad (146)$$

Dacă matricea F_{w1} este nesingulară, atunci parametrul θ_1' este identificabil şi deci parametrul θ_1 este identificabil.

Nivelul 3 *Analiza identificabilităţii parametrilor* θ_2 , θ_3 *şi* θ_5

Notând $\theta_5' = \theta_3\theta_5$ şi presupunând cunoscut parametrul θ_1' din etapele anterioare, din relaţia (135) obţinem:

$$\dot{\xi}_3 + u_2(1+u_3)\xi_3 - u_2 DO_{in} = -\Phi_1\hat{\theta}_1'\xi_1\theta_2 - u_1\xi_3\theta_3 + u_1\theta_5' \tag{147}$$

relaţie liniară în raport cu parametrii θ_2 , θ_3 şi θ_5'.

Amplificând în ambele părţi ale relaţiei (147) cu funcţiile de test $\varphi_i(t) \in \Phi_n$ şi integrând pe *R* se obţine un sistem de ecuaţii liniare în raport cu parametrii θ_2 , θ_3 şi θ_5':

$$F_v(\varphi) = \theta_2 F_{w_1}(\varphi) + \theta_3 F_{w_2}(\varphi) + \theta_5' F_{w_3}(\varphi) \tag{148}$$

unde

$$F_{w_1}(\varphi) = \int_R [\Phi_1(t)\cdot\xi_1(t)\cdot\hat{\theta}_1(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{149}$$

$$F_{w_2}(\varphi) = \int_R [-u_1(t)\cdot\xi_3(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{150}$$

$$F_{w_3}(\varphi) = \int_R u_1(t)\varphi^{(0)}(t)dt \tag{151}$$

$$F_v(\varphi) = \int_R \xi_3(t)\varphi^{(1)}(t)dt + \int_R [u_2(t)(1+u_3(t))\cdot\xi_3(t)]\varphi^{(0)}(t)dt + \int_R [-u_2(t)DO_{in}]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{152}$$

În consecinţă, parametrii θ_2 , θ_3 şi θ_5' sunt identificabili. Deoarece $\theta_5' = \theta_3\theta_5$ şi θ_3 este identificabil rezultă că θ_5 se obţine foarte uşor cu relaţia $\theta_5 = \theta_5'/\theta_3$ şi deci θ_5 este identificabil.

Nivelul 4 *Analiza identificabilităţii parametrilor* θ_6 , θ_7 *şi* θ_8

Notând $\theta_{67} = \theta_6\theta_7$ şi presupunând că putem măsura derivata lui ξ_1, din relaţia $\mu(t)\xi_1(t) = \Phi_1(t)$ şi relaţia (137) se obţine:

$$\mu\xi_1 = \Phi_1 \Rightarrow \theta_8 \frac{\xi_2}{\theta_6+\xi_2}\frac{\xi_3}{\theta_7+\xi_3} = \Phi_1 \tag{153}$$

$$\Rightarrow \theta_8 \frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{\theta_6\theta_7+\theta_6\xi_3+\theta_7\xi_2+\xi_2\xi_3} = \Phi_1 \tag{154}$$

$$-\theta_6\Phi_1\xi_3 - \theta_7\Phi_1\xi_2 + \theta_8\xi_1\xi_2\xi_3 - \theta_{67}\Phi_1 = \Phi_1\xi_2\xi_3 \tag{155}$$

Relaţia (155) este liniară în raport cu parametrii θ_6 , θ_7 şi θ_8

Amplificând în ambele părţi ale relaţiei (155) cu funcţiile de test $\varphi_i(t) \in \Phi_n$ şi integrând pe *R* se obţine un sistem de ecuaţii liniare în raport cu parametrii θ_6 , θ_7 şi θ_8

$$F_v(\varphi) = \theta_6 F_{w_1}(\varphi) + \theta_7 F_{w_2}(\varphi) + \theta_8 F_{w_3}(\varphi) + \theta_{67} F_{w_4}(\varphi) \tag{156}$$

unde

$$F_{w_1}(\varphi) = \int_R [-\Phi_1(t) \cdot \xi_3(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{157}$$

$$F_{w_2}(\varphi) = \int_R [-\Phi_1(t) \cdot \xi_2(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{158}$$

$$F_{w_3}(\varphi) = \int_R [\xi_1(t)\xi_2(t)\xi_3(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{159}$$

$$F_{w_4}(\varphi) = \int_R -\Phi_1(t)\varphi^{(0)}(t)dt \tag{160}$$

$$F_v(\varphi) = \int_R [\Phi_1(t) \cdot \xi_2(t)\xi_3(t)]\varphi^{(0)}(t)dt \tag{161}$$

În consecinţă, parametrii θ_6 , θ_7 şi θ_8 sunt identificabili.

BIBLIOGRAFIE

1) G. Bastin, D. Dochain, *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*, Elsevier, Amsterdam, 1990.
2) D. Dochain, P. Vanrolleghem, *Dynamical Modelling and Estimation in Wastewater Treatment Processes*. IWA Publishing, 2001.
3) G. F. Franklin, J. D. Powel, and A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems (3rd ed.)*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1995.
4) K. R. Godfrey and J. J. DiStefano. Identifiability of models parameters. In P. Young, editor, *Identification and System Parameter Estimation,* pages 89-114. Pergamon Press, Oxford, 1985.
5) K. R. Godfrey and J. J. DiStefano. Identifiability of models parameters. In E. Walter, editor, *Identifiability of Parametric Models,* pages 1-19. Pergamon Press, Oxford, 1987.
6) A. Isidori, Nonlinear Control Systems - The Third Edition, *Springer-Verlag, Berlin, 1995.*
7) R. Johansson, *Identification of continuous-time models,* IEEE Transactions on Signal Processing*,* 42(4), pp. 887-896, 1994.
8) L. Kantorovitch, G. Akilov, *Analyse fonctionnelle*, Edition Mir, Moscou, 1981.
9) L. Ljung, *System Identification. Theory for the User.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
10) C. Marin, 2002. System Identification Based on Distribution Theory. *Proceedings of the IASTED International Conference Applied Simulation and Modelling* (ASM 2002), Crete, June, 2002
11) E. Petre, *Nonlinear Systems. Applications in Biotechnology* (in Romanian), Universitaria, Craiova, 2002.
12) E. Petre, Adaptive Control of a Recycled Depollution Bioprocess, *Proc. of the 12-th Int. Symp. SIMSIS-12,* Galaţi, Romania, pp. 127-132, 2004.
13) E. Petre, D. Selisteanu, *Modelling and Identification of Depollution Bioprocesses*, Ed. Universitaria, Craiova, 2005.
14) E. Petre, D. Selisteanu, Nonlinear and Adaptive Control of a Time Delay Bioelectrochemical Process, *WSEAS Transactions on Systems*, Issue 10, Vol. 4, pp. 1601-1609, 2005

15) A. Patra, H. Unbehauen, 1995. Identification of a class of nonlinear continuous time systems using Hartley modulating functions. *Int. Journal of Control*. **Vol. 62**, No. 6, pp. 1431-1452.
16) Pearson, F. Lee, 1985. On the identification of Polynomial input-output differential systems. *IEEE Trans.Aut.Contr.*, **Vol. AC30**, No. 8, pp. 778-782.
17) L. Schwartz, *Théorie des distribution*, Paris, 1951.
18) E. D. Sontag. *Mathematical Control Theory*. *Deterministic Finite Dimensional Systems*
19) H. Unbehauen, G. P. Rao, 1987. *Identification of continuous systems*, (Amsterdam, North Holland).